



ENGENHARIA

Prof. Eng. Alexandre Dezem Bertozzi, Esp.

PESQUISA OPERACIONAL I

Programação Linear: Modelagem Algébrica (Parte 02)

AULA 4

PESQUISA OPERACIONAL

Programação Linear: Modelagem Algébrica (Parte 2)

OBJETIVO

Apresentar modelos de programação linear multiperíodo.

PROBLEMAS MULTIPERÍODO

Podem ser subdivididos em vários períodos (espaço de tempo, normalmente 1 dia).

O que é decidido para um período pode impactar na decisão a ser tomada para os próximos.

- Várias estratégias podem ser trabalhadas considerando diferenças entre os períodos
 - Por exemplo, funcionários de uma empresa que trabalham no fim de semana devem ter uma remuneração maior

PROBLEMAS MULTIPERÍODOS

Nas empresas, é comum que as demandas dos itens ocorram em períodos diversos de um horizonte de planejamento finito.

- Tarefas podem sofrer atraso ou serem adiantadas
- Recursos não utilizados em um período podem ficar disponíveis no próximo acumulando com possíveis novos recursos do novo período.

Exemplo: Decisão de **quais itens e em qual quantidade produzir em cada período** do horizonte de planejamento, de modo a atender sem atrasos a demanda.

UM PROBLEMA DE TREINAMENTO

Uma empresa tem um programa de treinamento para operadores de máquinas. Operadores treinados podem trabalhar como instrutores, assumindo **10 trainees**, mas destes, a empresa aproveita apenas **7**. Atualmente há **130** operadores treinados disponíveis na empresa. Eles também são necessários na linha de fabricação, e sabe-se que serão necessários para os próximos meses:

JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO	ABRIL
100	150	200	250

CUSTOS

Trainees	\$ 400,00
Operador treinado trabalhando	\$ 700,00
Operador treinado ocioso	\$ 500,00

Desenvolver um modelo de PL para encontrar o programa de treinamento de custo mínimo e satisfazer os requisitos da empresa a cada mês.
Um acordo firmado com o sindicato **proíbe demissões** de operadores treinados no período.

RESOLUÇÃO

A cada mês um operador treinado está: operando máquina, trabalhando como instrutor, ou está ocioso. Além disto, o nº. de operadores treinados trabalhando nas máquinas é conhecido: 100 em janeiro, 150 em fevereiro, 200 em março e 250 em abril. **As variáveis de decisão para o modelo são:**



OPERADORES	JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO
INSTRUTORES	X1	X3	X5
OCIOSOS	X2	X4	X6

FUNÇÃO OBJETIVO

“Custo total = custo trainees + custo instrutores + custo ociosos + custo operadores trabalhando em máquinas”.

$$\text{Min } Z = 400*(10X_1 + 10X_3 + 10X_5) + 700*(X_1 + X_3 + X_5) \\ + 500*(X_2 + X_4 + X_6) + 700*(100 + 150 + 200)$$

$$\text{Min } Z = 4700X_1 + 500X_2 + 4700X_3 + 500X_4 + 4700X_5 \\ + 500X_6 + 315.000$$

RESTRIÇÕES

Equação de balanço mensal:

**operadores treinados no início do mês =
operadores nas máquinas + instrutores + ociosos**

Janeiro: $130 = 100 + X_1 + X_2 \leftrightarrow X_1 + X_2 = 30$

Fevereiro: $130 + 7X_1 = 150 + X_3 + X_4 \leftrightarrow 7X_1 - X_3 - X_4 = 20$

Março: $130 + 7X_1 + 7X_3 = 200 + X_5 + X_6$

Abril: $250 = 130 + 7X_1 + 7X_3 + 7X_5$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES

É comum as empresas de manufatura lidarem como problemas que levam em consideração, entre outros, custos de:

- Estocagem
- Atraso na produção de itens ou perda de vendas
- Custos e/ou tempos de *setup*

Na literatura, o termo 'dimensionamento de lotes' ou '*lot sizing*' trata problemas com as características listadas, havendo uma grande variedade de situações.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Índices: t período de produção ($t=1,\dots,T$)
 i item ($i=1,\dots,m$)

Variáveis de decisão:

I_{it} estoque do item i no final do período t

X_{it} variável binária que indica se houve setup para o item i no período t ($x_{it} = 1$) ou não ($x_{it} = 0$)

q_{it} quantidade produzida do item i no período t

Parâmetros:

- T quantidade de períodos no horizonte planejado;
- m quantidade de itens;
- h_{it} custo de estocagem do item i no período t ;
- s_{it} custo de *setup* do item i no período t ;
- d_{it} demanda do item i no período t ;
- c_{it} custo unitário de produção do item i no período t ;
- R_t recurso disponível da máquina no período t .
- p_i recurso necessário para produzir uma unidade do item i ;

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T (s_{it} x_{it} + c_{it} q_{it} + h_{it} I_{it}) \quad (1)$$

s.a.

$$q_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m p_i q_{it} \leq R_t \quad \forall t \quad (3)$$

$$x_{it} \in \{0,1\} \quad \forall i, t \quad (4)$$

$$I_{it}, q_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (5)$$

custo de
estocagem

custo de
produção

custo de
setup

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (s_i x_{it} + c_i q_{it} + h_i I_{it}) & (1) \\
 \text{s.a.} \quad & q_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} & (2) \\
 & \sum_{i=1}^n p_i q_{it} \leq R_t & (3) \\
 & x_{it} \in \{0,1\} & (4) \\
 & I_{it}, q_{it} \geq 0 & (5)
 \end{aligned}$$

(2) **demanda do item no periodo** $\forall i, t$
 (3) **estoque no periodo** $\forall i, t$
 (4) **estoque no periodo anterior** $\forall i, t$
 (5) **produção no periodo** $\forall i, t$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (s_i x_{it} + c_i q_{it} + h_i I_{it}) \quad (1)$$

s.a.

$$q_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i q_{it} \leq R_t \quad \forall t \quad (3)$$

$$x_{it} \in \{0,1\} \quad \forall i, t \quad (4)$$

$$I_{it}, q_{it} \geq 0 \quad \forall i, t \quad (5)$$

recurso
disponível

recurso
utilizado

LEMBRANDO..