



Pesquisa Operacional: Simulação

Pesquisa Operacional: Simulação

Roberto Masahiko Aoki

Presidente

Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica

Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico

Ana Lucia Jankovic Barduchi

Camila Cardoso Rotella

Danielly Nunes Andrade Noé

Grasiele Aparecida Lourenço

Isabel Cristina Chagas Barbin

Lidiane Cristina Vivaldini Olo

Thatiane Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica

Alessandra Cristina Santos Akkari

Hugo Tanzarella Teixeira

Editorial

Camila Cardoso Rotella (Diretora)

Lidiane Cristina Vivaldini Olo (Gerente)

Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)

Leticia Bento Pieroni (Coordenadora)

Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Aoki, Roberto Masahiko

A638p Pesquisa operacional : simulação / Roberto Masahiko

Aoki. – Londrina : Editora e Distribuidora Educacional S.A.,
2018.

224 p.

ISBN 978-85-522-1305-5

1. Simulação. 2. Pesquisa operacional. 3. Modelagem. I.
Aoki, Roberto Masahiko. II. Título.

CDD 658

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018

Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza

CEP: 86041-100 – Londrina – PR

e-mail: editora.educacional@kroton.com.br

Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Introdução à Simulação em PO	9
Seção 1.1 - Introdução ao estudo de simulação	11
Seção 1.2 - Projeto de simulação em PO	24
Seção 1.3 - O uso do software Arena em simulação	36
Unidade 2 Programação dinâmica e programação não linear	59
Seção 2.1 - Programação dinâmica	61
Seção 2.2 - Introdução à programação não linear	78
Seção 2.3 - Tipos de programação não linear	95
Unidade 3 Markov, filas e simulação de Monte Carlo	115
Seção 3.1 - Cadeias de Markov - simulação	117
Seção 3.2 - Teoria das filas – simulação	130
Seção 3.3 - O método de Monte Carlo	150
Unidade 4 Teoria dos jogos e análise de decisão	169
Seção 4.1 - Teoria dos jogos	171
Seção 4.2 - Análise de decisão	185
Seção 4.3 - Teoria dos estoques	202

Palavras do autor

Bem-vindo a mais uma disciplina essencial na sua formação acadêmica e profissional.

Uma das áreas da pesquisa operacional se dedica a estudar a Programação Linear, a Programação Inteira e a Programação Binária. Essas técnicas são utilizadas para problemas que são resolvidos considerando o princípio da certeza, ou seja, que é possível assumir que as condições se manterão inalteradas por um determinado prazo, longo suficiente que possam ser assumidos constantes. Entretanto, em diversas situações as decisões devem ser tomadas em cenários sob riscos ou incertos (a diferença entre os dois será vista durante o desenvolvimento do conteúdo). Sob essas condições, a Programação Linear é ineficaz!

Veremos na disciplina Pesquisa Operacional: Simulação, as ferramentas e técnicas utilizadas para solucionar os problemas nesse ambiente incerto.

Após o término da disciplina você será capaz de desenvolver projetos de simulação de sistemas com o auxílio do software Arena e para isso conseguirá classificar o tipo correto de sistema que está em estudo. Você saberá resolver problemas envolvendo Programação Dinâmica e Programação Não Linear. Analisará as Cadeias de Markov, a Teoria das Filas e aplicará o Método de Monte Carlo com auxílio de planilha eletrônica. Conseguirá também resolver problemas de tomadas de decisão em cenários sob risco e sob incerteza e problemas envolvendo a gestão do estoque.

O material está dividido em quatro unidades distintas. Na Unidade 1 será realizada a introdução ao estudo de simulação em Pesquisa Operacional, e dentro dela aprenderemos com projetar uma simulação, suas fases e cuidados necessários desde sua concepção até que esteja pronta para ser rodada. Ainda na unidade inicial teremos contato com softwares de simulação que utilizam a programação visual, muito útil e prático nos projetos de simulação, em especial o ARENA, que é dos mais utilizados nos estudos de simulação.

A Unidade 2 abordará a Programação Dinâmica e a Programação Não Linear, seus tipos e aplicações. Em problemas de Programação Linear as funções são lineares, o que torna as variáveis de decisão

previsíveis quando se aumentam ou diminuem seus valores, entretanto nem todos os cenários reais e práticos obedecem essa condição, o que justifica entendermos os temas abordados nessa unidade.

Durante a Unidade 3 estudaremos As Cadeias de Markov, a Teoria das Filas e o método de simulação conhecido como Monte Carlo, uma técnica que utiliza um conjunto de números gerados aleatoriamente para assumir um outro conjunto de números com a mesma distribuição da variável considerada, ou seja, uma ou mais variáveis terão seus valores simulados através de números gerados aleatoriamente, enquanto o efeito desses valores gerados sobre outras variáveis será quantificado.

Na Unidade 4 o objeto de estudo será a Teoria dos Jogos e a Análise de Decisão. Um jogo pode ser entendido quando dois ou mais competidores tentam melhores resultados, assumindo ações diferentes. Apesar de a aplicação ser possível para mais de dois jogadores, vamos nos concentrar no caso mais simples, ou seja, onde temos dois competidores. Ainda na Unidade 4 conheceremos as técnicas de tomadas de decisão em cenários cercados de incertezas e sob riscos. Veremos como tomar decisões nessas condições.

Como você pode perceber, a disciplina Pesquisa Operacional: Simulação complementa os conteúdos referentes à Pesquisa Operacional e suas aplicações são úteis nas tomadas de decisão a que as empresas estão sujeitas em seu cotidiano. Ter conhecimento e domínio dessas técnicas e ferramentas é um importante diferencial para os bons profissionais envolvidos na gestão de fábricas e empresas em geral.

Finalmente, é importante que você tenha consciência de que o que será apresentado pode ser aprofundado, e para isso é necessária a contínua procura pelo conhecimento no assunto através de livros, artigos científicos e sites especializados no assunto.

Bons estudos!

Introdução à Simulação em PO

Convite ao estudo

A Pesquisa Operacional é um instrumento cuja aplicação está relacionada com a tomada de decisões. As várias ferramentas da Pesquisa Operacional permitem auxiliar em situações diferentes em relação às variáveis de decisão e aos objetivos de cada problema.

Nesta unidade inicial, teremos contato com a simulação como ferramenta de tomada de decisão em condições sob riscos ou de incerteza. Logo após, veremos quais são as etapas de formulação de um projeto de simulação, e na seção final será apresentado o software Arena usado em simulações de sistemas.

Ao final desta unidade você conhecerá e compreenderá os fundamentos de simulação bem como as etapas de um projeto de simulação e o uso do software Arena. Esse conhecimento lhe permitirá desenvolver projetos de simulação utilizando o software Arena no âmbito da Pesquisa Operacional.

Para auxiliar no entendimento dos conteúdos que serão apresentados, vamos utilizar o seguinte cenário: uma empresa deseja lançar um novo produto no mercado e, para o planejamento e a programação da produção, pretende simular a nova linha de produção antes da implantação e modificação da planta fabril.

Assim sendo, você foi convidado a participar da equipe responsável pelo desenvolvimento do projeto de simulação e deve colaborar diante dos desafios que aparecerão até a finalização do projeto que inicia com a modelagem do problema.

Esse é um pequeno exemplo de uma situação profissional em que você deve escolher entre alternativas e não é possível pensar em otimizar a solução por falta de certeza das informações, ou

seja, a Programação Linear não é a ferramenta correta para a análise. Como escolher entre as alternativas de maneira que a escolha seja feita racionalmente? Existe algum método, técnica ou ferramenta que pode ser usado neste contexto?

Na Unidade 1 faremos uma introdução sobre a simulação na primeira seção, quando serão apresentados os conceitos iniciais, sua importância, aplicações e tipos; as vantagens e desvantagens e os cuidados necessários na modelagem dos sistemas; na seção seguinte estudaremos o desenvolvimento de projeto de simulação em Pesquisa Operacional; e finalmente, na terceira seção, construiremos um modelo de simulação usando o software Arena.

Seção 1.1

Introdução ao estudo de simulação

Diálogo aberto

Uma empresa deseja lançar um novo produto no mercado e, para o planejamento e a programação da produção, pretende simular a nova linha de produção antes da implantação e da modificação da planta fabril. O objetivo da simulação é que o processo de fabricação do novo produto seja balanceado, evitando a formação de gargalos.

A produção desse novo produto passa por vários processos de usinagem sequencialmente. Inicia com o processo de corte de tarugos cilíndricos de aço, na medida proposta pelos engenheiros projetistas. Após o corte, as peças são encaminhadas para o setor de tornos para que sejam ajustadas em seus diversos diâmetros. Uma vez torneadas, as peças são enviadas para o setor de fresamento, onde são processadas até o seu formato final. A seguir, os produtos são enviados para a retificação e, após isso, são encaminhados para a embalagem.

Para a movimentação das peças são utilizados contêineres que são encaminhados por um colaborador encarregado em transportar as peças entre os setores. Esse colaborador tem outras atribuições que impedem que a movimentação dos contêineres seja feita em horários programados, ou com tempos predeterminados, podendo considerar que as entregas são feitas quase que aleatoriamente.

Assim sendo, você foi convidado a participar da equipe responsável pelo desenvolvimento do projeto de simulação e deve colaborar diante dos desafios que aparecerão até a finalização do projeto que inicia com a modelagem do problema.

O primeiro desafio é coletar as informações necessárias para construir um modelo do cenário inicial, que será utilizado posteriormente na elaboração do projeto de simulação, sem a preocupação com as informações de tempo de processamento e demanda.

Você, como o encarregado pelo levantamento das informações, deve fazer um relatório preliminar com as informações pertinentes ao estudo da simulação.

Quais informações você acha relevantes? Como conseguir essas informações?

Agora é com você! Mostre sua capacidade e habilidade em solucionar esse desafio.

Não pode faltar

Introdução à simulação

É comum ouvir o termo “simular” e suas variantes em diversas situações do nosso cotidiano, como: simular o valor do benefício a receber diante as novas regras da aposentadoria, simular o financiamento da casa própria, simular o comportamento de um novo modelo de automóvel no túnel de vento. Até mesmo no jogo de futebol de fim de semana ouvimos que o jogador simulou sofrer uma falta.

Encontramos o significado de simular em diversos dicionários como “imitar”, “replicar”, “repetir” e outros que se assemelhe a “representar com semelhança”. Em Pesquisa Operacional, simulação é uma técnica muito utilizada por sua flexibilidade, além de ser intuitiva, e que faz uso do computador para imitar (simular) a operação de um sistema (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 896). “Simulação implica na modelagem de um processo ou sistema, de tal forma que o modelo imite as respostas do sistema real numa sucessão de eventos que ocorrem ao longo do tempo” (SCHRIBER, 1974 apud FREITAS FILHO, 2008, p. 21).

No ambiente das empresas a simulação é uma ferramenta muito aplicada, com objetivos específicos em diversas situações em sua rotina. Por exemplo, treinamento de pilotos de avião em cabines que podem imitar cenários de perigo nas empresas de aviação, programação da produção para verificar a existência de gargalos em indústrias em geral, etc.

O objetivo é criar um ambiente em que se possa conseguir informações sobre ações alternativas através da experimentação, permitindo uma análise mais aprofundada do sistema em estudo (MOORE, 2005, p. 428).

O objetivo da simulação é tentar prever como se comportarão os sistemas no futuro, ou seja, uma maneira de antecipar os efeitos produzidos por mudanças, ou implantação de novos métodos nas rotinas e operações. Através da simulação é possível propor hipóteses e teorias considerando as observações do comportamento do modelo construído, o que facilita a compreensão e aceitação de resultados.



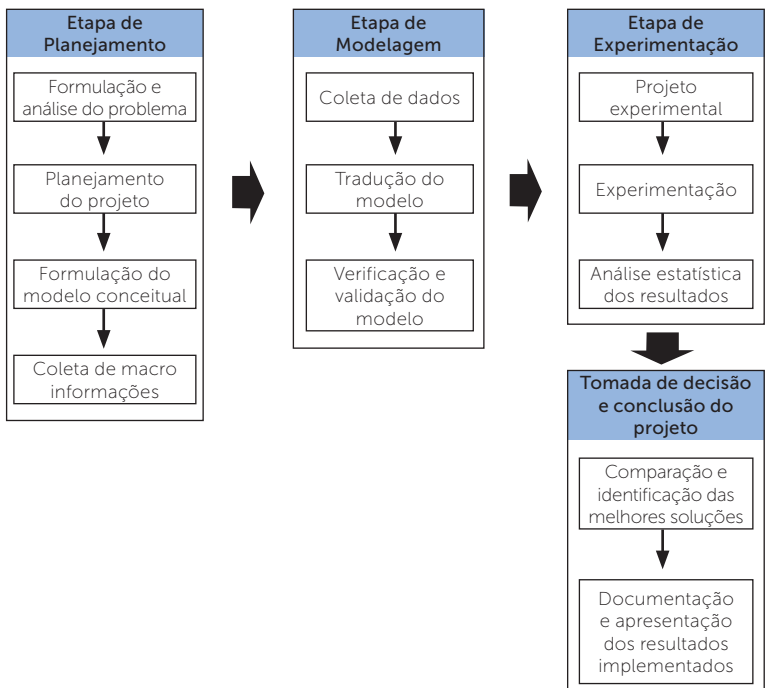
Em *Simulação da ampliação do Aeroporto de Guarulhos*, o autor Marcelo Moretti Fioroni descreve o trabalho de simulação no projeto de ampliação do Aeroporto Internacional de Guarulhos.

Durante a expansão o exército brasileiro, responsável pelo planejamento e gerenciamento da obra, foi identificado como ponto crítico o prazo de execução da obra. Para viabilizar a obra foi feita uma simulação e apresentada à empreiteira responsável assegurando a segurança da obra.

Disponível em: <<http://www.paragon.com.br/noticias-e-artigos/artigo-simulacao-da-ampliacao-do-aeroporto-de-guarulhos/>>. Acesso em: 20 set. 2018).

As principais etapas de um estudo de modelagem e simulação podem ser vistas na Figura 1.1.

Figura 1.1 | Etapas de um estudo de modelagem e simulação



Fonte: adaptada de Freitas Filho (2008, p. 29).

Serão descritas as etapas relativas ao planejamento, modelagem e experimentação do processo de modelagem e simulação de sistemas.

Na etapa de planejamento, na formulação e análise do problema são definidos os objetivos do estudo.

Durante o planejamento do projeto, é importante saber se os recursos necessários estarão disponíveis em quantidade suficiente. Também deve-se fazer uma descrição dos vários cenários que serão investigados bem como um cronograma de atividades.

A etapa formulação do modelo conceitual esboça a ideia inicial do sistema, definindo componentes e descrevendo as variáveis envolvidas e as interações que definem o sistema.

Coleta de macroinformações e dados é a fase em que fatos, informações e dados estatísticos são coletados para alimentar os parâmetros do sistema modelado.

Tradução do modelo diz respeito à codificação do modelo em uma linguagem apropriada de simulação (nos dias atuais, essa fase fica minimizada com o uso de softwares específicos de simulação).

Todo modelo deve passar por verificação e validação para confirmar que ele atende as necessidades do estudo e que os resultados apresentados serão confiáveis e representarão o “mundo real”.

O principal objetivo do projeto experimental é conseguir o maior número de informações possível com o mínimo de experimentações, e para isso deve-se projetar experimentos que possam produzir as informações necessárias.

É na experimentação que são realizadas as simulações para gerar dados desejados e para a realização da análise de sensibilidade.

Na análise estatística dos resultados é possível traçar inferências utilizando os resultados alcançados pela simulação, ou seja, é possível estudar o comportamento de uma população através do comportamento apresentado durante a simulação.

Vantagens e desvantagens da simulação

A simulação permite visualizar o comportamento do sistema e economiza tempo e recursos, possibilitando ganho de produtividade e qualidade. Além disso, a construção do modelo de simulação é bem mais simples que os modelos matemáticos analíticos, exigindo

conhecimento avançado de matemática ou simplificações para que seja possível tratá-los matematicamente, podendo prejudicar a representação do sistema real que está sendo simulado. E a simulação é, geralmente, mais fácil de aplicar que os métodos analíticos (FREITAS FILHO, 2008, p. 26).

Os modelos uma vez construídos podem ser utilizados diversas vezes, permitindo avaliar cenários diferentes para políticas alternativas propostas, sendo possível testar hipóteses sobre a atuação de fenômenos no sistema. Quando utilizado um software de simulação é possível utilizar animações que facilitam o entendimento do comportamento de cada cenário diferente avaliado. Animações também facilitam a identificação de gargalos.

A simulação permite planejar e analisar o funcionamento de sistemas completos virtualmente, ainda não existentes, permitindo correções no modelo inicial à medida que este vai evoluindo em sua construção. Em sistemas reais já existentes, considerando que o modelo representa detalhadamente o real, é possível avaliar novos cenários sem a necessidade de perturbar o sistema real.

Os softwares de simulação permitem acelerar ou diminuir a velocidade de trabalho do sistema. Ao acelerar a velocidade, poupamos tempo em relação ao sistema real em estudo, enquanto diminuindo a velocidade nos possibilita estudar detalhadamente os fenômenos.

Apesar das várias vantagens apresentadas, a simulação também tem alguns inconvenientes e desvantagens, como a necessidade de modeladores competentes – competência que é adquirida somente com tempo e treinamento.

A construção do modelo de simulação necessita de diversos recursos, sendo o principal deles o tempo. Casos em que existe a urgência ou a necessidade de redução de recursos podem levar a tentativas de simplificações e a experimentação do modelo, podendo comprometer a qualidade, despertando resultados insatisfatórios.

Em certos modelos de simulação, a técnica utilizada é através da experimentação, ou seja, através de tentativa e erro. Desta maneira os experimentos são realizados alterando as variáveis do modelo que podem levar a soluções inviáveis ou inexistentes no sistema real.

Aplicações da simulação

Existem várias situações que justificam a utilização da simulação. Veremos algumas a seguir, conforme Andrade (2015):

- Quando um sistema ainda não existe – a utilização da simulação permite planejar sistemas ainda não existentes.
- Quando é muito caro testar mudanças em um sistema real já implantado – a simulação poderá demonstrar resultados caso seja realizado algum tipo de mudança no sistema já existente, o que poupa tempo e recursos financeiros.
- Quando a experimentação com o sistema real é inadequada ou inapropriada – a simulação permite o planejamento (e treinamento) do atendimento de emergência em situações de emergência e catastrófica.
- Quando um sistema em estudo apresenta complexidade de forma que seja impossível descrever através de equações e fórmulas matemáticas um modelo que apresente uma solução analítica viável.
- Quando, mesmo sendo possível construir um modelo matemático para o sistema em estudo, o desenvolvimento para se chegar à solução for muito trabalhoso e com pouca flexibilidade. Um exemplo dessa situação é um sistema de fila com múltiplos canais com chegadas e atendimentos definidos por distribuições desconhecidas.

Tipos de simulação

Os sistemas a serem modelados e simulados podem ser classificados como: estáticos ou dinâmicos, determinísticos ou aleatórios (também conhecidos como estocásticos) e ainda como contínuos ou discretos. A classificação está ilustrada na Figura 1.2.

Os sistemas dinâmicos, diferentemente dos sistemas estáticos, estão sujeitos a mudanças à medida que o tempo passa, e os valores das suas saídas dependem de valores de entradas passadas, um bom cenário que permite a simulação.

Os modelos de simulação chamados determinísticos não possuem variáveis aleatórias; em outras palavras, em um conjunto de dados de entrada teremos na saída um único conjunto de

respostas. A desvantagem de utilizar o modelo determinístico é trabalhar com a média dos valores e não considerar o impacto que cada valor individual provoca no sistema, o que pode ser bastante relevante.

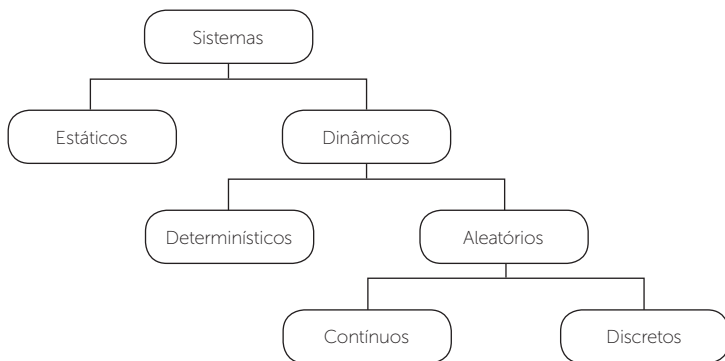
Os modelos aleatórios (estocásticos) apresentam entradas com uma ou mais variáveis aleatórias, que resultam em saídas aleatórias. O modelo aleatório é utilizado quando, pelo menos, uma das características operacionais é representada por uma função de distribuição de probabilidade.



Refleta

Os modelos determinísticos não contêm variáveis aleatórias, enquanto nos modelos estocásticos, também conhecidos como probabilísticos, existem uma ou mais variáveis aleatórias de entrada que levam a saídas aleatórias. Diante de modelos tão distintos é possível construir um modelo de um sistema real utilizando dados de modelos determinísticos e probabilísticos ao mesmo tempo?

Figura 1.2 | Classificação dos sistemas para fins de modelagem



Fonte: adaptada de Freitas Filho (2008, p. 46).

Nos modelos contínuos as variáveis de estado variam constantemente ao longo do tempo. Nos modelos discretos as variáveis de estado mantêm-se inalteradas durante um intervalo de tempo e mudam de valor em pontos específicos bem definidos.



No vídeo *Simulação de eventos discretos: teoria e aplicações*, o autor Arthur Feital faz uma introdução à simulação de eventos discretos através de linguagem simples e apresentando exemplos para fixação de conceitos. Duração: 22 minutos e 13 segundos. Assistir a partir de 9:55 minutos. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ZE7fa5queRU>>. Acesso em: 20 set. 2018.

Outra forma de classificar os modelos de simulação é considerando o objetivo do estudo (FREITAS FILHO, 2008). Neste contexto os modelos podem ser:

Voltados à previsão: quando a simulação pretende prever o estado do sistema em algum ponto do tempo futuro, considerando que o sistema continuará se comportando como no estado atual.

Voltados à investigação: neste tipo de simulação, procuram-se informações para desenvolver hipóteses sobre o comportamento do sistema. Neste caso as variáveis de resposta servem para se ter melhor conhecimento sobre a natureza do sistema em estudo.

Voltados à comparação: realizando várias rodadas de simulação é possível fazer uma comparação no comportamento do sistema. Essa possibilidade de comparação é muito útil para analisar o comportamento do sistema quando se alteram as variáveis de controle.

Modelagem para simulação

De maneira semelhante a um estudo de otimização, a simulação depende de um modelo matemático para que seja possível fazer uma análise quantitativa do problema, entretanto, enquanto em um modelo de otimização (por exemplo: Programação Linear) os valores das variáveis de decisão são saídas, nos modelos de simulação as variáveis de decisão são entradas. Ou seja, em um problema de otimização resolvido por Programação Linear, o modelo fornece valores para as variáveis que irão maximizar (ou minimizar) a função-objetivo. Como nos modelos de simulação as variáveis de decisão são entradas, o modelo avalia a função objetivo para um conjunto de valores (MOORE, 2005, p. 429).

Componentes de um modelo de simulação

Um conjunto de termos é utilizado para conceitualizar e facilitar o entendimento sobre um sistema a ser modelado:

As *variáveis de estado* são responsáveis por fornecer as informações do que está acontecendo no sistema em um determinado momento. Por exemplo: o número de carros esperando em uma fila para pagar o pedágio em um determinado momento da simulação.

A *entidade* representa um objeto que necessita de uma clara e explícita definição. Pode ser dinâmica, movendo-se pelo sistema, ou estática. Exemplo de entidades dinâmicas podem ser peças que se movem pela fábrica, pessoas entrando e saindo de uma fila do caixa de supermercado, etc. Os caixas do supermercado são as entidades estáticas.

Os *atributos* associados às entidades também dependem do tipo de investigação que está sendo realizada. O uso de atributos permite caracterizar e individualizar as entidades e também possibilita a obtenção de dados estatísticos importantes sob o comportamento do sistema em estudo.

Recursos são considerados entidades estáticas que fornecem serviços e são utilizados pelas entidades dinâmicas. Um recurso pode servir uma ou mais entidades dinâmicas ao mesmo tempo, operando como um servidor paralelo.

Processos (ou atividades): corresponde a um período de tempo predeterminado. A duração de um processo não necessariamente será uma constante. Pode depender de uma função matemática, um valor aleatório baseado em uma distribuição de probabilidade.

Já o *tempo simulado* refere-se ao tempo real, e o tempo de simulação é o tempo que se necessita para a execução total de uma simulação.

Eventos são os fatos acontecidos, que podem ter sido programados ou não, e que quando acontecem provocam uma alteração no estado do sistema.



Assimile

O processo de simulação dentro da Pesquisa Operacional é uma importante ferramenta para a tomada de decisão, pois apresenta várias vantagens na otimização na utilização de recursos. Entretanto,

é necessário que o simulador tenha a competência de construir modelos corretamente, caso contrário todo esforço será em vão. Portanto, reforce os conceitos apresentados até aqui sobre os tipos de sistemas, pois disso dependerá a forma e o tipo de dados que serão inseridos no modelo, o que será decisivo na qualidade da simulação e seus resultados.

Sem medo de errar

Uma empresa deseja lançar um novo produto no mercado e deseja fazer um estudo inicial através da simulação de uma linha para a produção desse novo produto. Foi passado aos engenheiros de processo o sequenciamento das operações. Outra informação importante que foi passada é como as peças são movimentadas. A você foi solicitado que fizesse um relatório preliminar com os dados pertinentes para a modelagem do sistema em estudo.

As informações que serão úteis na construção do modelo de simulação para o estudo da implantação do novo produto são:

O sequenciamento do processo de produção referente ao novo produto é: (1) corte, (2) torneamento, (3) fresamento, (4) retífica e (5) embalagem.

Como a movimentação das peças é feita através de contêineres, é necessário saber quantas peças cabem em cada um deles. Essa informação será útil na hora de informar ao sistema simulado quantas peças chegam simultaneamente a cada equipamento no setor de usinagem.

Informações que deverão ser coletadas para complementar os dados necessários para a construção do modelo de simulação:

- Tempo de processamento das peças em cada equipamento no setor de usinagem.
- Tempo do colaborador para movimentar os contêineres contendo as peças de um equipamento para o outro.

De posse dessas informações é possível fazer um tratamento matemático inicial que irá alimentar o modelo a ser construído.

Portanto, no relatório que foi solicitado, você deverá incluir as seguintes informações:

1. Nome e código do novo produto.
2. O sequenciamento dos processos de fabricação do produto.
3. Os tempos de processamento em cada processo.
4. A quantidade de peças que cabem em cada contêiner.
5. Tabela com os intervalos de tempo em que é feita a movimentação das peças.

Avançando na prática

Decisão entre alternativas para melhorar a produtividade

Descrição da situação-problema

Considere que a fábrica deseja aumentar a produtividade reduzindo o tempo em que as peças ficam paradas à espera para serem processadas em um determinado setor. Essa espera surge por um gargalo identificado. Como solução, a empresa pensa em duas estratégias: uma é comprar uma nova máquina e a outra, implantar um sistema de troca rápida de ferramentas que poderá dar maior rapidez na produção das peças, aumentando consequentemente a produtividade.

Como você poderia utilizar a simulação para decidir entre as alternativas pensadas pela empresa?

Resolução da situação-problema

Inicialmente é preciso construir o modelo que represente da melhor maneira possível o sistema real. Com o modelo construído, verificado e validado, passa-se a alterar as variáveis com os dados referentes a cada alternativa, analisando o comportamento do sistema a cada alteração.

Uma vez rodada a simulação de cada alternativa, através dos relatórios de desempenho, escolhe-se a melhor alternativa que solucionará o problema de gargalo que faz com que as peças esperem para ser processadas.

Faça valer a pena

1. Com relação aos modelos de simulação usados na engenharia, considere as afirmativas a seguir:

I – São usados para analisar situações e requerem um impacto reduzido no sistema real do estudo.

II – Iniciam pela representação do mundo real através de um modelo matemático.

III – Permitem analisar vários cenários antes que eles realmente aconteçam.

Fonte: adaptado de Neumann (2011, p. 119).

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

- a) III, apenas.
- b) I e II, apenas.
- c) I e III, apenas.
- d) II e III, apenas.
- e) I, II e III.

2. A simulação consiste na utilização de ferramentas matemáticas que permitem imitar o funcionamento de, praticamente, qualquer tipo de operação ou processo de sistemas reais; em outras palavras, é o estudo do comportamento desses sistemas reais através da construção de modelos.

Dentre as finalidades da simulação, destaca-se: (NEUMANN, 2011, p. 117)

- a) Descrever o comportamento de sistemas de forma consistente e rápida.
- b) Impedir que variáveis dinâmicas mudem de estado, o que geraria um novo sistema.
- c) Otimizar sistemas não convergentes.
- d) Reproduzir o comportamento de qualquer tipo de sistema, até os não estruturáveis.
- e) Simplificar variáveis em sistemas complexos, reduzindo a inerente dificuldade de modelar sistemas nebulosos.

3. As técnicas de simulação são ferramentas muito utilizadas na gestão de operações. Entretanto, apesar das várias vantagens apresentadas, a simulação também tem alguns inconvenientes e desvantagens, como a necessidade de modeladores competentes – competência que é adquirida somente com tempo e treinamento.

Outra desvantagem da simulação é: (adaptado de NEUMANN, 2011, p. 118)

- a) A impossibilidade de testar cenários diferentes para um mesmo problema operacional.
- b) A necessidade de interferência direta nos sistemas reais, afetando as operações do dia a dia.
- c) A inadequação para estudar situações complexas do mundo real com grande quantidade de variáveis.
- d) O uso de abordagem iterativas e de tentativa e erro que podem levar a soluções inviáveis ou inexistentes.
- e) Um escopo de soluções restrito a fenômenos presentes.

Seção 1.2

Projeto de simulação em PO

Diálogo aberto

Caro estudante, nesta seção vamos abordar os conceitos, fundamentos, fases e aplicações de um projeto de simulação. Para que um estudo de simulação seja bem-sucedido é preciso que uma série de cuidados sejam tomados ao longo de todo o processo. Uma forma de diminuir os riscos de insucesso é tratar todos os estudos de simulação como projetos. Projetos são eventos que exigem esforços temporários (ou seja, com prazo para término) para atingir um objetivo preestabelecido. Normalmente, esse objetivo é o que se quer simular.

O conhecimento adquirido nesse momento será de grande valor na sua vida profissional, pois permitirá a você, futuro profissional, modelar, simular e estudar soluções para as mais variadas situações que exigirão uma decisão, a escolha entre alternativas.

Nesta seção, retomaremos a situação apresentada na seção anterior, da empresa que está estudando o lançamento de um novo produto.

O lançamento do novo produto foi confirmado pela diretoria da empresa e foi estipulada a data para o início da produção, de forma a não atrasar as entregas nos pontos de vendas, pois será feito um grande investimento em propaganda e marketing para a divulgação do lançamento, e qualquer atraso implicará em prejuízo financeiro e risco à imagem da empresa.

Tendo em vista a importância em cumprir os prazos de fabricação e entrega, a gerência de produção planeja um projeto para simular o comportamento do sistema de usinagem a fim de concluir o planejamento e a programação da produção do produto.

Apesar de ser um novo produto, a empresa trabalha com outros similares, que são processados por máquinas semelhantes às que serão utilizadas na nova produção.

Já sabemos que o sequenciamento de operações definido pelos projetistas é: corte, torneamento, fresamento, retificação e embalagem.

O seu relatório contendo as informações preliminares deixaram os diretores bastante satisfeitos. Dessa forma você foi convidado a

participar da equipe responsável pelo projeto de simulação, devendo auxiliar na definição e na construção das etapas envolvidas no projeto.

O problema a ser simulado já foi definido: é a preocupação com a formação de gargalos na linha de produção devido ao lançamento do novo produto; e o objetivo do projeto é que a nova linha seja bem balanceada, evitando as filas de espera dos produtos a ser processadas (gargalos).

Portanto, veremos que as etapas do projeto referentes à definição do problema e seu objetivo já foram definidas anteriormente, quando você elaborou o relatório.

Agora, elabore um plano de ação para cumprir as etapas faltantes para a finalização do projeto de simulação.

Você, que é um importante integrante deste time, vai mostrar seu valor!

Não pode faltar

Conceito de projeto de simulação

Vimos anteriormente que a simulação é a tentativa de imitar um cenário real através de modelos e que para que o sistema simulado seja o mais próximo do real é preciso concluir uma série de etapas. Em uma simulação também é importante que seja respeitado o prazo de finalização do estudo, sem negligenciar a qualidade desejada. Sob essa visão podemos tratar cada sistema a ser simulado como um projeto.

Segundo a ISO 10.006, *Diretrizes para a qualidade no gerenciamento de projetos*, projeto é um “Processo único, consistindo de um grupo de atividades coordenadas e controladas com datas para início e término, empreendido para alcance de um objetivo conforme requisitos específicos, incluindo limitações de tempo, custo e recursos” (ABNT, 2000, p. 2).

Segundo Bateman et al. (2013) da mesma forma que é impensável construir uma casa sem um projeto, um bom estudo de simulação requer o cumprimento de algumas etapas inter-relacionadas, embora cada estudo de simulação seja considerado único. Podemos concluir que cada estudo de simulação pode ser tratado como um projeto de simulação pela sua originalidade e pelas etapas inter-relacionadas que devem ser cumpridas.



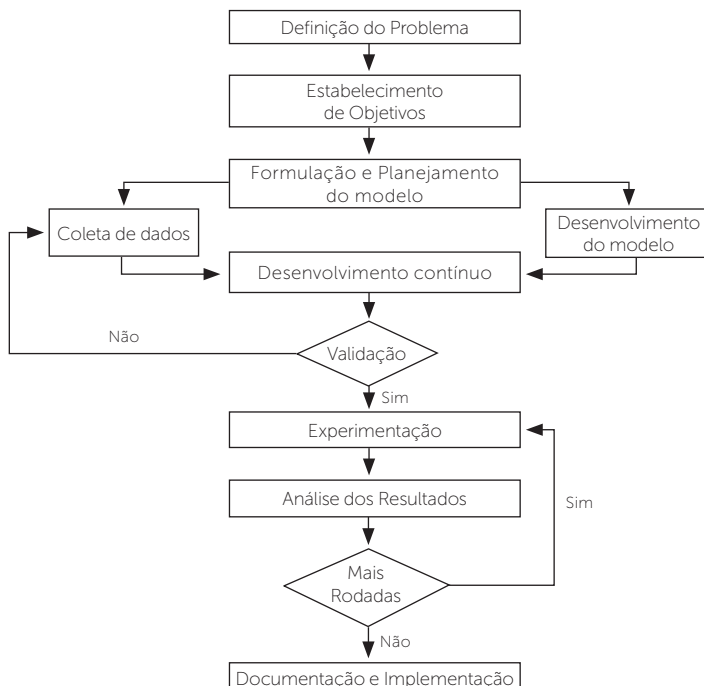
O gerenciamento de projetos consiste na aplicação de ferramentas gerenciais com objetivo de desenvolver habilidade na gestão de projetos (VARGAS, 2009). E cada estudo de simulação pode ser comparado a um projeto. O gerenciamento de projetos é dividido em nove áreas de conhecimento que se integram. São elas: integração; escopo; tempo; custos; qualidade; recursos humanos; comunicações; riscos; e aquisições. Qual seria o papel dessas áreas no projeto de simulação para que o estudo seja bem-sucedido?

Fases do projeto de simulação

Na seção anterior foram apresentadas resumidamente as etapas de um estudo de modelagem e simulação. Agora, vamos demonstrar os inter-relacionamento entre as etapas no projeto de simulação.

Na Figura 1.3, Bateman et al. ilustra as etapas e suas inter-relações.

Figura 1.3 | Inter-relações entre os passos de simulação



Fonte: Bateman et al. (2013, [s.d.], cap. 5).

Explicação de cada fase de um projeto de simulação

Definição do problema: Hillier (2013) ensina que a equipe envolvida no estudo deve iniciar os trabalhos agendando uma reunião com a direção para definir o problema a ser estudado. Isto porque, segundo Bateman et al. (2013), mesmo os estudos mais exaustivos não serão valorizados se não atenderem a uma necessidade real. Entretanto, definir o problema objeto do estudo nem sempre é simples, pois existem vários interessados (como engenheiros, gerentes, programadores da produção, entre outros com expectativas específicas em sua área) no estudo além do simulador responsável pelo desenvolvimento do modelo. Freitas Filho (2008, p. 28) propõe responder as seguintes perguntas para auxiliar a formulação e análise do problema:

- Por que o problema está sendo estudado?
- Quais serão as respostas que o estudo espera alcançar?
- Quais são os critérios para a avaliação da performance do sistema?
- Quais são as hipóteses e prerrogativas?
- Que restrições e limites são esperados das soluções obtidas?

Estabelecimento de objetivos: definido o problema a ser estudado, a questão passa a ser quais são os objetivos gerais e as questões específicas para que seja possível solucionar o problema definido. Dentre as questões específicas é importante que sejam adicionados objetivos de tempos e marcos a serem atingidos para que o estudo não caminhe indefinidamente sem fornecer resultados úteis, correndo o risco de perder credibilidade.

Formulação e planejamento do modelo: o modelador responsável desenvolve uma estrutura conceitual do modelo estrutural, também conhecido como modelo conceitual. O uso de recursos gráficos como desenhos de layout, fluxogramas, croquis do sistema (como pseudocódigos) proporcionam vantagens como a facilidade de compreensão e detalhamento do modelo facilitando a coleta dos dados (FREITAS FILHO, 2008; BATEMAN et al., 2013). A coleta dos dados corretos influenciará fortemente nos resultados obtidos.

Coleta de dados: "os tipos de dados necessários dependem da natureza do sistema a ser simulado" (HILLIER, 2013, [s.d.], cap. 20). Segundo Bateman et al. (2013, [s.d.], cap. 5) e Freitas Filho (2008, p.

29), a coleta de dados inicial deve ser daquelas consideradas como fundamentais: as informações e os dados estatísticos que fazem parte das macroinformações, ou macrodados, armazenados pelas organizações. Entretanto, em caso de simulação de novos sistemas em que não é possível a coleta de dados entre os armazenados pela organização, o simulador pode conseguir esses dados através de sistemas que atuam de forma similar, de informações técnicas de máquinas e equipamentos, ou ainda com o auxílio de especialistas que podem opinar sobre o comportamento do sistema em estudo. É importante ressaltar que a coleta de dados deve ser um processo contínuo.

Desenvolvimento do modelo: o processo de desenvolvimento do modelo é um processo dinâmico que, à medida que o estudo de simulação vai evoluindo com a entrada de novos eventos e os relacionamentos entre eles, que foram definidos no modelo conceitual, vai se tornando um modelo lógico (BATEMAN, 2013). O desenvolvimento do modelo também pode ser entendido como a codificação do modelo numa linguagem de simulação apropriada, ou ainda como a tradução do modelo (FREITAS FILHO, 2008). A coleta de dados e a construção do modelo pode acontecer simultaneamente.

Verificação e validação: na etapa de verificação o simulador examina se o modelo reage conforme sua expectativa. Na simulação de sistemas complexos, normalmente é efetuada uma depuração para assegurar que o modelo reflita de maneira exata a intenção do modelador. Por sistemas complexos podemos entender sistemas que promovem interação de um conjunto de campos de estudos distintos, como um estudo integrado envolvendo física, matemática e biologia. A verificação pode ser feita com o auxílio de animações que permitem rodar o modelo em velocidades baixas o suficiente para acompanhar, detalhadamente, o comportamento do modelo. Entretanto, Bateman (2013) alerta que a animação não deve ser utilizada de maneira isolada, sendo aconselhável o uso de outras ferramentas como contadores para dar maior robustez ao modelo. Feita a verificação é necessário validar o modelo, ou seja, assegurar que o modelo vai refletir o sistema real. Uma forma de validar o modelo é alterando os dados de entrada para determinar se o modelo responderá conforme o sistema real. Uma variante desse método é alimentar o modelo com dados históricos (caso existam) e comparar os resultados reais com os resultados simulados. Outra

forma de validar o modelo é permitindo que especialistas tentem distinguir entre várias cópias de resultados simulados e reais. Caso os especialistas não sejam capazes de distinguir entre os resultados reais e os simulados, significa que o modelo representa o sistema real.

Experimentação: nessa fase são executadas as simulações para a geração de dados. É comum projetar um conjunto de experimentos que produza a informação desejada através de um projeto experimental (FREITAS FILHO, 2008, p. 31), que é o desenvolvimento de procedimentos e testes para analisar e comparar alternativas (BATEMAN, 2013). O objetivo do projeto de experimento é maximizar a utilidade da informação produzida pelas rodadas de simulação, minimizando a necessidade de replicações. Sem o projeto experimental poderá ser difícil comparar entre soluções candidatas.

Análise dos resultados: a partir dos resultados conseguidos na simulação são traçadas inferências estatísticas (generalizações a partir de amostras) e efetuadas estimativas para as medidas de desempenho nos cenários planejados. Eventualmente, poderá ser necessário um maior número de rodadas (replicações) para que se atinja uma precisão estatística sobre os resultados desejados. Freitas Filho (2008, p. 31) afirma que em muitas situações o emprego da simulação tem como objetivo a identificação de diferenças entre várias alternativas ou comparar um sistema existente com alternativas.

Documentação e implementação: é importante que a configuração do modelo, bem como os resultados, seja sempre documentada. O armazenamento dos registros, além de auxiliar o simulador a determinar a melhor alternativa, permitirá considerar as outras alternativas (BATEMAN, 2013). A correta documentação do modelo servirá como referência para futuros estudos ou para que alguém possa fazer uso do mesmo modelo ou dos seus resultados (FREITAS FILHO, 2008). A implementação, segundo Bateman (2013), começa com o início do projeto de simulação. A apresentação dos resultados do projeto deve ser feita por toda equipe envolvida (FREITAS FILHO, 2008), e o processo de comunicação entre a equipe e os usuários finais deve ser completa durante todo o período do projeto, pois somente dessa forma todos estarão envolvidos durante o processo e, portanto, estarão muito mais propensos a auxiliar na implementação da solução encontrada.

Em resumo, um projeto de simulação deve seguir as seguintes etapas: a partir da **definição do problema** objeto de estudo do projeto, são **estabelecidos os objetivos** da simulação, que devem responder as perguntas formuladas quando foi definido o problema a ser estudado. Passa-se então à **formulação e planejamento do modelo** conceitual, ou seja, um modelo inicial concebido para dar início do processo de simulação. Com o modelo conceitual definido, é preciso **coletar os dados** relevantes para alimentar o modelo que está sendo construído. A próxima etapa diz respeito ao **desenvolvimento do modelo**, que é a evolução do modelo conceitual inicial amadurecido com os eventos (e suas interações com os demais eventos) e dados coletados pelo simulador. Construído o modelo, é necessário fazer a **verificação e validação** do modelo para garantir que este, de fato, representará o sistema real. Validado o modelo, é o momento de passar à **experimentação**, que é rodar o modelo e depois **analisar os resultados**. Após a análise, é recomendada a **documentação** do estudo para servir de referência para futuros estudos e consulta. Finalmente é feita a **implementação** da solução encontrada.



Assimile

O projeto de simulação de um sistema procura retratar um sistema real através de um modelo que é construído, validado, experimentado e posteriormente implementado. A etapa mais sensível diz respeito aos dados que alimentarão o modelo, pois deles dependerá o atingimento dos objetivos estabelecidos.

O sucesso em simular um sistema real através de modelos computacionais está diretamente relacionado ao entendimento do comportamento do sistema em estudo, que em grande parte depende do processo de amostragem e da coleta dos dados.

Em simulações, a construção de modelos utiliza funções de distribuições de probabilidade como forma de representar a ocorrência de eventos aleatórios (FREITAS FILHO, 2008, p. 155). Portanto, é condição indispensável ter conhecimentos em probabilidade nos projetos de simulação.

Freitas Filho (2008) lista os cinco passos básicos para a identificação da distribuição de probabilidades e o comportamento aleatório de um sistema:

1. Processo de amostragem e coleta de dados.
2. Tratamento de dados.
3. Identificação da distribuição de probabilidade.
4. Estimação dos parâmetros da distribuição identificada.
5. Teste de aderência.

Seguindo o roteiro dos cinco passos, os dados que alimentarão o modelo de simulação estarão devidamente tratados, garantindo os resultados obtidos.



Pesquise mais

No vídeo *Simulação de eventos discretos: tratamento de dados de entrada*, o autor Arthur Feital explica a modelagem dos dados de entrada em simulação de eventos discretos, em linguagem simples e apresentando exemplos para fixação de conceitos. Duração: 14 minutos e 52 segundos. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DbjhT8Xcw1Q>>. Acesso em: 10 jul. 2018.

Aplicação de um projeto de simulação

Os campos de aplicação de projetos de simulação são diversos e dependem do objetivo do estudo para construir o modelo que irá representar (imitar) o sistema real.

São em linhas de produção a área que tem tido a maior quantidade de aplicações de modelagem para simulação. É possível analisar inúmeros cenários desde as empresas manufatureiras até minerações (PRADO, 2014), sendo possível analisar casos de expansão de produção, troca de equipamentos, adição de novos produtos, etc. Prado (2014) explica que é possível antecipar a formação de gargalos decorrentes de modificação do sistema existente ou pela introdução de modificações como alterações na programação, modificação no fluxo ou adição de novos recursos, e conclui que uma melhor gestão de estoque pode ser conseguida através da simulação.



Exemplificando

A simulação tem aplicação em diversas áreas desde a manufatura até em empresas prestadoras de serviço. Na área de logística existem casos na aplicação da simulação envolvendo centros de distribuições, transporte, layout, entre outros. O link a seguir apresenta o caso da aplicação da simulação no comportamento de um centro logístico com a variação de demanda. Disponível em: <http://www.belge.com.br/IndLog_schneider_Port.php>. Acesso em: 21 set. 2018.

Sem medo de errar

O projeto de simulação que estuda a linha de produção de um novo produto que será lançado deverá atender às etapas descritas no plano de ação proposto.

O plano de ação proposto consiste em:

Formulação e planejamento do modelo (modelo conceitual): é necessário interpretar o tipo de simulação que será efetuada. Conforme foi estudado na seção anterior, quando foi apresentada a classificação dos tipos de sistemas de simulação, as informações colhidas indicam que a modelagem será de um sistema dinâmico aleatório discreto, e os dados serão inseridos no modelo manualmente.

Coleta de dados: como a linha de produção diz respeito a um novo produto, não existem dados que poderão ser utilizados de forma direta, entretanto sabe-se que os processos são parecidos com os demais produtos da empresa. Portanto, para a alimentação inicial do modelo, podemos utilizar dados de processos similares aos descritos pelos projetistas. Considerando que os dados estão devidamente armazenados, podemos supor que os dados já foram anteriormente utilizados e não há necessidade de tratamento dos dados.

Desenvolvimento do modelo: usaremos programas que utilizam linguagem de simulação baseada em programação visual, pela facilidade na construção do modelo. Será selecionado um dos softwares de simulação existentes no mercado que oferecem facilidades adicionais como animações, contadores existentes, controle de velocidade da simulação, dentre outras características.

Verificação e validação: para a verificação e validação do modelo, ele será alimentado com dados históricos de outras linhas de produção e depois comparado com os dados reais, de forma a certificar que as informações geradas são confiáveis.

Sua proposta de plano de ação conseguiu contemplar todas as fases do projeto de simulação e certamente deixará todos os envolvidos bem satisfeitos com a sua compreensão da importância de cada uma das etapas.

Parabéns!

Avançando na prática

Tratamento de dados de simulação

Descrição da situação-problema

Durante o estudo de simulação de um sistema real, em uma das etapas do projeto, um integrante da equipe colocou em dúvida a qualidade dos dados que seriam utilizados para alimentar o experimento, o que provocou uma grande dúvida se estes deveriam ou não ser usados. A diretoria decidiu que para dar maior credibilidade ao estudo os dados seriam descartados e que novos dados deveriam ser levantados. Entretanto, haverá a necessidade de tratar esses dados antes de serem utilizados na experimentação do modelo.

Você foi designado para descrever como esses dados devem ser tratados para que possam ser utilizados posteriormente.

Resolução da situação-problema

Para a solução desse novo cenário, é preciso recorrer ao conhecimento de probabilidade visto anteriormente.

Inicialmente é preciso um processo de amostragem e coleta de dados. O tamanho da amostra considera o Intervalo de Confiança (IC) e do erro relativo que se deseja ao estudo.

Com os dados em mãos, passa-se ao tratamento destes para futura utilização. Para as distribuições discretas, monta-se uma tabela de distribuição de frequências e histograma obedecendo as seguintes etapas: (1) com cálculo do número de classes (regra de

Sturges); (2) determinação da frequência absoluta de cada classe; e (3) construção do histograma das frequências absolutas.

Uma vez tratados os dados, é preciso identificar a distribuição teórica de probabilidade através da comparação com as principais distribuições discretas, realizando um delineamento preliminar da distribuição.

Em seguida é preciso estimar os parâmetros da distribuição, como a média, a moda e a mediana, e das medidas de dispersão, como variância e desvio-padrão.

Finalmente são feitos testes de aderência para comprovar se a distribuição teórica é representada por uma das principais distribuições discretas. Comprovada a aderência, os dados são ajustados e prontos para serem usados no modelo de simulação.

Faça valer a pena

1. Os projetos de simulação estão sujeitos ao fracasso por falta de planejamento desde o seu início até a aplicação efetiva da simulação do sistema em estudo. Muitos projetos não têm seus objetivos claramente definidos: ou cria-se uma expectativa muitas vezes fora da realidade, ou ainda a falta de uma clara compreensão das necessidades envolvidas é a causa dos fracassos, o que gera frustração e desilusão dos envolvidos.

Das alternativas a seguir, assinale a que contém somente etapas de um projeto de simulação?

- a) Definição do problema; estabelecimento de objetivos; coleta de dados; verificação e validação; experimentação.
- b) Kaizen; estabelecimento de objetivos; coleta de dados; verificação e validação; experimentação.
- c) Definição do problema; estabelecimento de objetivos; coleta de dados; verificação e validação; controle estatístico de processo.
- d) Definição do problema; estabelecimento de objetivos; gestão de operações; verificação e validação; experimentação.
- e) Definição do problema; identificação de riscos; coleta de dados; Kanban; experimentação.

2. Uma das principais preocupações do modelador de um projeto de simulação é se o modelo construído representa de forma correta o sistema real (ou o sistema que está sendo projetado) e se existem erros durante a programação, como um erro de lógica.

A verificação e a validação serão consideradas de qualidade quando:

- a) É atingido o objetivo do projeto de simulação.
- b) Não há necessidade de executar a experimentação do modelo.
- c) O resultado obtido pelo modelo e os dados obtidos pelo sistema real são muito próximos.
- d) Não há necessidade de depuração do modelo.
- e) Estiverem prontas para a experimentação.

3. Em projetos de simulação, a aleatoriedade é um fator de relevância, pois o comportamento de sistemas reais em grande parte comportam-se como sistema dinâmico aleatório discreto tanto na chegada no sistema quanto no atendimento (processamento).

A aleatoriedade de chegadas em um sistema é representada por:

- a) Tempo médio de chegada.
- b) Desvio médio do tempo de chegada.
- c) Tempo de espera no sistema.
- d) Intervalo de chegada ao sistema.
- e) Função de distribuição de probabilidade.

Seção 1.3

O uso do software Arena em simulação

Diálogo aberto

De acordo com pesquisas de mercado, chegou-se a uma previsão de demanda do novo produto, e o departamento de programação e controle da produção (PCP) calculou que as entradas das ordens de fabricação serão encaminhadas à produção segundo uma distribuição exponencial com média de 105 minutos. Cada ordem de produção liberará a fabricação de um lote contendo dez peças/produtos que corresponde à capacidade dos contêineres de transporte.

Foram analisadas as etapas do processo de fabricação do novo produto, e, por analogia aos processos existentes para a fabricação de outros produtos, foram obtidas as seguintes informações:

O processo de corte de todo o lote corresponde a uma distribuição triangular com tempo mínimo de 100 minutos, tempo mais provável de 115 minutos e tempo máximo de 140 minutos.

O processo de torneamento do lote obedece a uma distribuição normal com média de 170 minutos com desvio-padrão de 16,4 minutos.

O processo de fresamento será segundo uma distribuição triangular com tempo mínimo de 135 minutos, tempo mais provável de 165 minutos e tempo máximo de 180 minutos, por lote.

O processo de retífica também será regido por uma distribuição normal com média de 190 minutos com desvio-padrão de 16,7 minutos.

E finalmente a embalagem tem como distribuição a triangular, com tempo mínimo de 75 minutos, tempo mais provável de 90 minutos e tempo máximo de 105 minutos.

Como a movimentação dos lotes entre os processos é efetuado por um funcionário que tem outras atribuições, um estudo de tempos através do método de amostragem do trabalho chegou à conclusão de que os lotes serão movimentados conforme uma distribuição exponencial com média de 45 minutos.

De posse das informações e a fim de simular a nova linha de produção do novo produto, você foi indicado para construir o modelo do projeto com o auxílio do Arena.

Para que seja possível vencer esse novo desafio, você aprenderá, nesta seção, os conceitos do Arena e como construir o modelo a partir das funções dos módulos na área de template, que são as ferramentas que comandam o processamento do modelo construído.

Como você estruturará o modelo no Arena? Esse desafio é mais uma oportunidade de colocar em prática o que você aprendeu.

Não pode faltar

Simulação supõe o uso de computadores para auxiliar na geração de números aleatórios (que é a essência da simulação) e no rápido processamento de dados, transformando-os em informação. É possível simular alguns modelos através de planilhas eletrônicas como o Excel, entretanto alguns modelos mais complexos exigirão um conhecimento mais aprofundado em equações, fórmulas e macros, o que nem todos possuem.

Softwares específicos para serem usados na simulação de sistemas são desenvolvidos desde o uso comercial (industrial) dos computadores no início da década de 1950, quando as linguagens Fortran e Algol foram bastante utilizadas no desenvolvimento de programas de simulação. Na década de 1960, surgiram diversas linguagens de simulação, com destaque para o *General Purpose Simulation System* (GPSS), criado em conjunto entre a IBM e os laboratórios Bell. Porém, poucos computadores eram capazes de executar esses programas por falta de memória. Com a proliferação do uso dos computadores pessoais a partir dos anos 1980, observou-se o surgimento da chamada “simulação visual” e foram desenvolvidos programas como Arena, Taylor, Promodel, Automod, etc. (PRADO, 2014).

Concentraremos nesta obra o estudo de simulação com o auxílio do software Arena. O distribuidor do Arena permite baixar a versão acadêmica, gratuitamente após cadastro prévio. Disponível em: <<http://www.paragon.com.br/c/downloads/>> (acesso em: 21 set. 2018).

Conceitos e fundamentos do software Arena

Como em qualquer problema de pesquisa operacional, a simulação de um sistema só será bem-sucedida caso a construção do modelo seja corretamente montado e represente o sistema real que está sendo estudado.

A técnica utilizada pelo Arena para a construção do modelo é a programação visual, que consiste na criação do fluxo do sistema por meio de um diagrama de blocos, correspondendo à ocorrência dos eventos a um cliente genérico que flui pelo sistema sendo modelado, conforme ilustrado na Figura 1.4.

Figura 1.4 | Eventos e o fluxograma



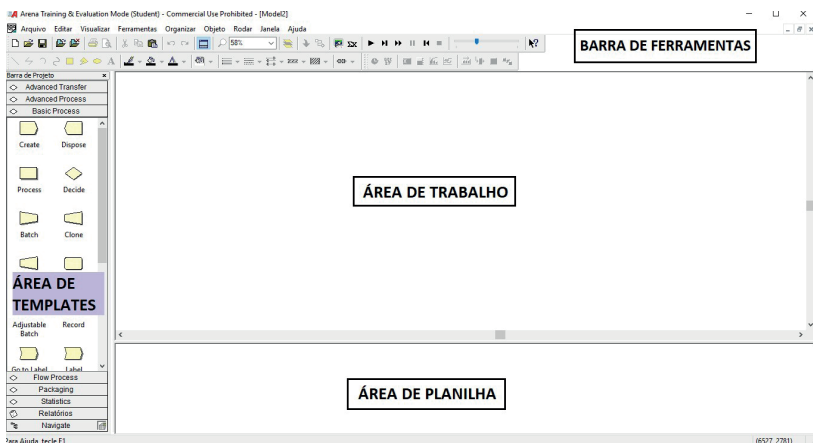
Fonte: adaptada de Prado (2014, [s.d.], cap. 5).

O fluxograma é iniciado com módulo *Create* que indica a chegada das entidades (clientes, peças, lote ao sistema). Uma vez dentro do sistema, a entidade deve ser atendida (utilizando um equipamento, atendido por uma pessoa, processado por uma máquina), e os dados são inseridos no módulo *Process*. E finalmente, uma vez finalizado o atendimento, a entidade sai do sistema através do módulo *Dispose*.

Interface do software

O ambiente de trabalho do Arena é mostrado na Figura 1.5. A tela inicial é dividida em quatro campos: a barra de ferramentas, a área de trabalho, a área de *templates* e a área de planilha.

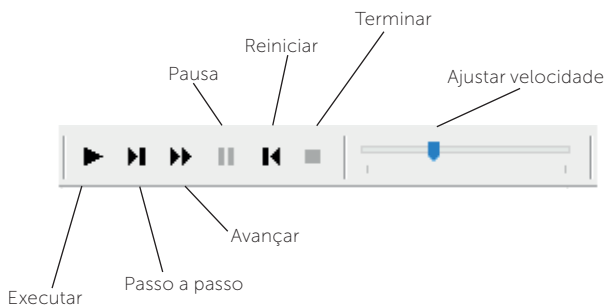
Figura 1.5 | Ambiente de trabalho do Arena



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

Barra de ferramentas: as ferramentas para a construção e execução dos modelos estão localizadas aqui (em blocos), algumas estão ocultas e, para que elas sejam exibidas, basta clicar com o botão direito do mouse e acionar o bloco desejado. Inseridos na barra de ferramentas estão os comandos de execução do modelo, conforme a Figura 1.6.

Figura 1.6 | Comandos de execução do modelo



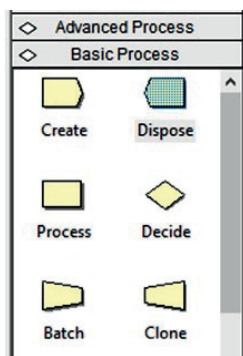
Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

Área de trabalho: nessa região, são construídos os modelos, adicionando os blocos que compõem cada um. Caso haja a necessidade de alterar o modelo, é nessa área que são efetuadas as mudanças.

Área de planilha: na área de planilha são mostrados os detalhes dos módulos ativados na área de trabalho. É possível fazer alterações nos módulos a partir dessa área. Para isso, é preciso clicar no módulo que deseja fazer a alteração.

Área de *templates*: está localizada à esquerda da tela. Ali estão mostrados os *templates* para cada modelo, e cada *template* possui um conjunto de módulos, como ilustrado na Figura 1.7.

Figura 1.7 | Para cada *template* existe um conjunto de módulos



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Ferramentas do software Arena

As ferramentas do Arena são os *templates* que estão dispostos em módulos, conforme visto na Figura 1.7. São através dos módulos que se constrói o modelo a ser simulado.

Os módulos mais básicos para a construção do modelo se encontram no *basic process* na área de *templates* e serão descritos a seguir.

Create: é o ponto de partida para entidades em um modelo de simulação. Entidades representam objetos que podem ser dinâmicos ou estáticos. As entidades dinâmicas podem ser peças que se movem pela fábrica ou clientes chegando e saindo de filas de atendimento, enquanto entidades estáticas são máquinas ou equipamentos que

atendem as entidades dinâmicas. As entidades são criadas usando um cronograma ou com base em um horário entre as chegadas. Em seguida, deixam o módulo para começar o processamento por meio do sistema. O tipo de entidade é especificado neste módulo. Pode ser uma pessoa se movendo dentro de um posto de saúde ou peças que passam de processo por processo até serem totalmente finalizadas.

Dispose: é o ponto final das entidades em um modelo de simulação. Estatísticas de entidade podem ser registradas antes que a entidade seja eliminada.

Process: é o principal método de processamento na simulação. Neste módulo estão disponíveis opções para aproveitar e liberar restrições de recursos. Existe ainda a opção de usar um "submodelo" e especificar uma lógica hierárquica. O tempo de processo é alocado para a entidade.

Decide: permite processos de tomada de decisão no sistema.

Batch: destina-se ao mecanismo de agrupamento dentro do modelo de simulação. Os lotes de entidades podem ser agrupados permanente ou temporariamente. Um exemplo de lote de entidades são peças que após processadas aguardam ser transportadas para um próximo processo em contêineres, formando um lote de peças, ou entidades. Os lotes temporários devem ser divididos posteriormente, usando o módulo *Separate*.

Clone: cria duplicatas da entidade que chega e as envia para o nome do rótulo de destino do clone.

Separate: pode ser usado para copiar uma entidade recebida em várias entidades ou para dividir uma entidade em lotes.

Assign: é usado para atribuir novos valores a variáveis, atributos de entidade, tipos de entidade, imagens de entidade ou outras variáveis do sistema.

Adjustable batch: é um mecanismo de agrupamento dentro do modelo de simulação. Os lotes de entidades podem ser agrupados permanentemente ou temporariamente. Os lotes temporários devem ser divididos posteriormente, usando o módulo *Separate*.

Record: é usado para coletar estatísticas no modelo de simulação. Vários tipos de estatísticas observacionais estão disponíveis.

Go to label: é usado para direcionar o fluxo do modelo para um rótulo especificado. A entidade que entra nesse módulo será

direcionada para o rótulo especificado. Uma etiqueta é criada por meio do módulo *Label*.

Label: é usado para definir um rótulo específico. Quando uma entidade é direcionada para um rótulo por meio de um módulo *Go to label*, a entidade será enviada para o módulo de etiqueta correspondente. A finalidade dos módulos *Go to label* e *Label* é direcionar o fluxo da entidade de uma área da visualização do fluxograma da janela do modelo para outra sem o uso de um conector de módulo.



Assimile

A programação do modelo no Arena é feita através da utilização dos módulos existentes nos *templates* e utiliza termos próprios para conceitualizar os elementos que consistem no sistema. Portanto, para que o modelo seja corretamente construído e garantir a qualidade do estudo, é preciso que o modelador esteja familiarizado com as funções dos módulos e com os termos que foram apresentados na Seção 1.1 deste livro didático.

Aplicação do Arena em Pesquisa Operacional

O software Arena permite simular vários tipos de sistemas de diferentes áreas de aplicação como: logística, serviços, transportes, redes, manufaturas, etc.

Segundo Freitas Filho (2008, p. 106), para modelar sistemas no Arena, deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1 – a partir do *Template Basic Process* inserir e inter-relacionar os módulos, de forma a representar o sistema segundo a sua lógica de operação.

Passo 2 – inserir os dados no modelo.

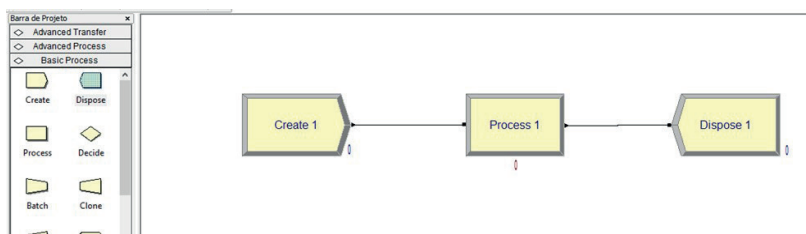
Passo 3 – executar a simulação do modelo.

Passo 4 – gerar relatório e interpretar os resultados.

Vejamos o exemplo do sistema mais simples que consiste em um único posto de atendimento. Os clientes chegam ao posto do único atendente; caso o atendente esteja ocupado, os clientes devem aguardar para serem atendidos em fila; após o atendimento, o cliente sai do sistema.

Passo 1 - na Área de *Templates*, selecione a opção *Basic Process* e clique com o botão esquerdo em *Create*. Mantendo o botão pressionado, arraste até a área de trabalho. Uma vez criado o módulo de entrada (*Create*), devemos adicionar os módulos *Process* e *Dispose*, que são os módulos de processamento e saída, respectivamente, do sistema. Arraste os módulos para a área de trabalho, e o software adicionará o conector (que representa o relacionamento entre ambos) automaticamente. Após arrastar todos os módulos, temos o fluxograma do sistema modulado, conforme a Figura 1.8.

Figura 1.8 | Fluxograma do sistema simulado



Fonte: adaptada de Freitas Filho (2008, p. 107).

Caso o conector não tenha sido criado automaticamente, é preciso criá-los manualmente. Para isso, é preciso clicar com o botão esquerdo do mouse em cima do módulo (*Create*, por exemplo) e depois no ícone de conexões  na barra de ferramentas. Ao aproximar o cursor próximo ao lado direito do *Create*, aparecerá um pequeno quadrado verde indicando o ponto inicial de conexão. Clique com o botão esquerdo no quadrado verde. Posicione o cursor próximo ao outro módulo (*Process*, por exemplo), e aparecerá outro quadrado verde do lado esquerdo do módulo. Clique nele e o conector estará criado.

Passo 2 – os dados dos modelos são inseridos segundo seu tipo.

O **processo de chegada** é informado no módulo *Create*. Os dados podem ser fornecidos de duas formas: dando duplo clique em cima do módulo ou na área de planilha, na parte inferior da tela.

Ao dar duplo clique no módulo, abrirá a caixa de entrada de dados, conforme a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Tela de entrada de dados do Create

The screenshot shows the 'Create' dialog box with the following fields and values:

- Name:** Create 1
- Entity Type:** Entity 1
- Time Between Arrivals:**
 - Type: Random (Expo)
 - Value: 1
 - Units: Hours
- Entities per Arrival:** 1
- Max Arrivals:** Infinite
- First Creation:** 0.0

Buttons at the bottom: OK, Cancelar, Ajuda.

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

No campo *Name* é possível entrar com o nome do bloco, por exemplo: "Chegada de clientes". Ao lado, é possível escolher e nomear o tipo de entidades. No nosso exemplo, definiremos a entidade como "Clientes".

Em *Time Between Arrivals* (tempo entre chegadas), no campo *Type*, é possível optar por quatro tipos distintos de chegadas:

1. *Random (Expo)* – chegadas aleatórias, segundo uma distribuição exponencial.
2. *Schedule* – chegadas conforme uma programação (agendamento).
3. *Constant* – chegadas constantes.
4. *Expression* – chegadas segundo outra distribuição.

Em *Value*, é fornecido o valor da chegada conforme o tipo de chegada, e ao lado, em *Units*, a unidade das chegadas: segundos, minutos, horas ou dias.

Entities per Arrival indica o número de entidades que chegam a cada evento.

Max Arrivals é a entrada do número máximo de chegadas definido para a simulação. O intervalo é de 1 ao infinito.

E, finalmente, *First Creation* é o momento em que a primeira entidade chega ao sistema. Usualmente: 0,0.

A segunda forma de entrar com os dados é por meio da área de planilha. Com o botão esquerdo do mouse, clica-se em cima do módulo que se deseja entrar com os dados na área de trabalho. Na parte inferior da tela, na área de planilha, a planilha de entrada de dados aparecerá, e será possível entrar com os dados ou alterar conforme a necessidade.

As informações referentes ao **processo de atendimento** são fornecidas no módulo *Process*. Para dar entrada nos dados, o procedimento é o mesmo, ou seja, dando um duplo clique em cima do módulo ou por meio da área de planilha. Dando duplo clique no módulo, abrirá a caixa conforme a Figura 1.10.

Figura 1.10 | Tela de entrada do *Process*

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

No campo *Name*, é dado o nome ao módulo do “processo de atendimento”.

Em *Type*, existem duas opções: *Standart* e *Submodel*. A opção *Submodel* não será abordada no estágio introdutório.

Em *Logic*, o campo *Action* possui quatro opções: *Delay*, *Seize*, *Delay Release* e *Delay Release*.

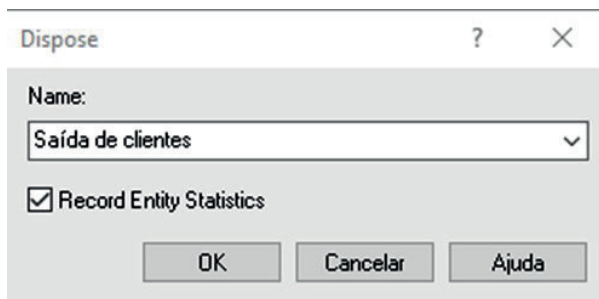
A opção padrão do Arena é *Delay*, que indica que a entidade que está passando pelo módulo sofre um atraso, realizando uma parada ou uma espera, de acordo com as informações que podem ser vistas na parte inferior da Figura 1.10. Nessa forma de modelagem, a entidade não precisa de nenhum tipo de recurso para realizar a atividade.

Ao selecionar as outras opções que não seja o *Delay*, indica que o processo precisa de recursos do sistema para ser realizado. A opção *Seize Delay Release* indica que um recurso será tomado pela entidade (*Seize*), que essa entidade ficará com a posse do recurso por um determinado tempo (*Delay*) e que, finalmente, quando o processamento acabar, a entidade liberará o recurso (*Release*) e se encaminhará para o próximo módulo (FREITAS FILHO, 2008, p. 111).

Ao acionar a opção *Seize Delay Release*, aparecem dois novos campos. O primeiro diz respeito ao recurso que será utilizado no processo, e o segundo trata da prioridade sobre a posse desse recurso.

Finalmente, o **processo de saída** é informado no módulo *Dispose*. Após o atendimento pelo recurso, o cliente sai do sistema, como visto na Figura 1.11.

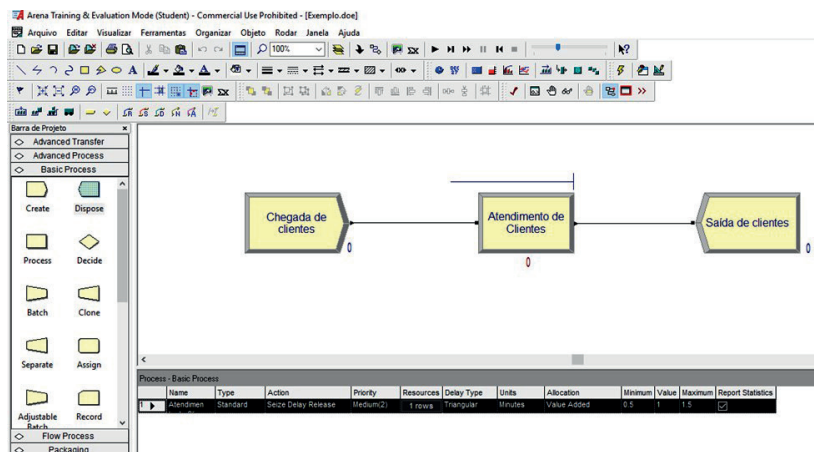
Figura 1.11 | Saída do cliente no módulo *Dispose*



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

O formato final do modelo é visto na Figura 1.12.

Figura 1.12 | Modelo final do exemplo genérico



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

Passo 3 – após inseridos todos os dados nos módulos referentes a entrada e processamento, é preciso executar a simulação do modelo acionando o comando executar, conforme visto na Figura 1.6.



Refleta

O Arena oferece vários relatórios sobre o comportamento do sistema segundo seus componentes como: *Entities* (Entidades); *Process* (Processos); *Queues* (Filas). Como esses relatórios podem ajudar no processo de melhoria do sistema e na tomada de decisões?

Passo 4 – após a execução da simulação é possível gerar relatórios para a análise do comportamento do sistema.



Exemplificando

Vamos construir um modelo utilizando o Arena de um sistema para simular um serviço de lava-jato, conforme apresentado por Freitas Filho (2008, p. 52). O sistema consiste: na chegada dos carros a serem lavados; na lavagem do carro; e na saída do carro do sistema.

O fluxograma do sistema no Arena é ilustrado na Figura 1.13:

Figura 1.13 | Fluxograma do sistema de um serviço de lava-jato



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

Os carros chegam no serviço de lava-jato segundo uma distribuição exponencial com média cinco minutos. Os dados são inseridos conforme a Figura 1.14.

Figura 1.14 | Entrada de dados no serviço de lava-jato

Create

Name: Entity Type:

Time Between Arrivals

Type: Value: Units:

Entities per Arrival: Max Arrivals: First Creation:

Fonte: adaptada de Freitas Filho (2008, p. 109).

A operação de lavar o carro será realizada através de um lavador, e o tempo de lavar o carro obedece a uma função de distribuição triangular com parâmetros: tempo mínimo de 2 minutos; tempo mais provável de 4 minutos; e tempo máximo de 6 minutos. A entrada de dados é demonstrada na Figura 1.15.

Figura 1.15 | Entrada de dados do processo de lavagem

Process

Name: Type:

Logic

Action: Priority:

Resources:

Delay Type: Units: Allocation:

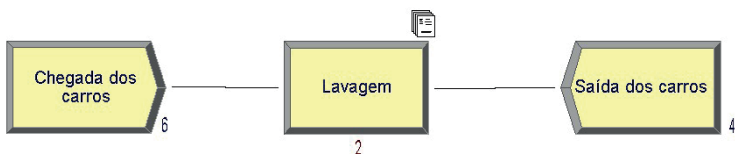
Minimum: Value (Most Likely): Maximum:

☒ Report Statistics

Fonte: adaptada de Freitas Filho (2008, p. 111).

Com o modelo finalizado é hora de rodar a simulação acionando a tecla *play* na barra de ferramenta, conforme a Figura 1.16. Quando o sistema está sendo simulado, aparecerá a quantidade de entidades que entraram no sistema, quantos estão em processamento e quantos já saíram após o atendimento, conforme a Figura 1.16.

Figura 1.16 | Simulação do sistema em andamento



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.



Pesquise mais

Ao instalar o Arena é instalada junto uma série de livros eletrônicos, inclusive um manual do usuário completo, na pasta: C:/ Arquivo de Programas (x86)/ Rockwell Software/ Arena/ Online Books. Esses livros e manuais são úteis para aprofundar os conhecimentos na aplicação do Arena e construção dos modelos usando os módulos disponíveis na área de *templates*.

Outra fonte de consulta é a opção AJUDA do próprio software.

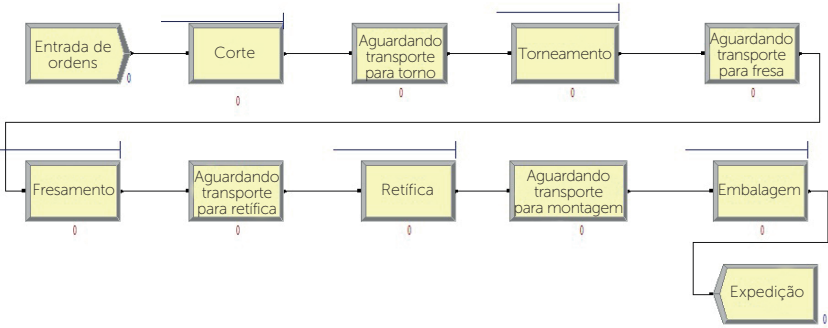
Sem medo de errar

Você foi indicado para construir o modelo de simulação usando o Arena.

Os dados do processo de fabricação do produto foram investigados, e as informações sobre o comportamento do sistema foram disponibilizadas.

Para a sequência de processos é montado um modelo com os módulos disponíveis no *Template Basic Process*. O fluxograma é demonstrado na Figura 1.17.

Figura 1.17 | Modelo do processo de fabricação do novo produto



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

A entrada das ordens de processo no sistema é demonstrada na Figura 1.18.

Figura 1.18 | Entrada de dados no módulo *Create* com os dados de entrada de Ordens de Produção

A captura de tela mostra a interface do módulo **Create** no Rockwell Automation. O formulário contém os seguintes campos e configurações:

- Name:** Entrada de Ordens
- Entity Type:** Peças
- Time Between Arrivals:**
 - Type:** Expression
 - Expression:** EXPO(105)
 - Units:** Minutes
- Entities per Arrival:** 1
- Max Arrivals:** Infinite
- First Creation:** 0.0

Na base do formulário, há três botões: **OK**, **Cancelar** e **Ajuda**.

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Os dados referentes aos processos de corte, torneamento, fresamento, retifica e embalagem são alimentados conforme as Figuras 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 e 1.23, respectivamente.

Figura 1.19 | Entrada de dados para o processo de corte

The 'Process' dialog box for a cutting process is shown. It includes fields for Name (Corte), Type (Standard), Logic (Seize Delay Release), Priority (Medium(2)), Resources (Resource, Seira, 1), Delay Type (Triangular), Units (Minutes), Allocation (Wait), Minimum (100), Value (Most Likely) (115), and Maximum (140). The 'Report Statistics' checkbox is checked. Buttons for 'OK', 'Cancelar', and 'Ajuda' are at the bottom.

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Figura 1.20 | Entrada de dados para o processo de torneamento

The 'Process' dialog box for a turning process is shown. It includes fields for Name (Torneamento), Type (Standard), Logic (Seize Delay Release), Priority (Medium(2)), Resources (Resource, Torno, 1), Delay Type (Normal), Units (Minutes), Allocation (Value Added), Value (Mean) (170), and Std Dev (16.4). The 'Report Statistics' checkbox is checked. Buttons for 'OK', 'Cancelar', and 'Ajuda' are at the bottom.

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Figura 1.21 | Entrada de dados para o processo de fresamento

Process

?

×

Name:

Fresamento

Type:

Standard

Logic

Action:

Seize Delay Release

Priority:

Medium(2)

Resources:

Resource: Fresadora, 1

<End of list>

Adicionar...

Editar...

Apagar

Delay Type:

Triangular

Units:

Minutes

Allocation:

Value Added

Minimum:

135

Value:(Most Likely):

165

Maximum:

180

☒ Report Statistics

OK

Cancelar

Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Figura 1.22 | Entrada de dados para o processo de retifica

Process

?

×

Name:

Retifica

Type:

Standard

Logic

Action:

Seize Delay Release

Priority:

Medium(2)

Resources:

Resource: Retificadora, 1

<End of list>

Adicionar...

Editar...

Apagar

Delay Type:

Normal

Units:

Minutes

Allocation:

Value Added

Value:(Mean):

190

Std Dev:

16,7

☒ Report Statistics

OK

Cancelar

Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

52 U1 - Introdução à Simulação em PO

Figura 1.23 | Entrada de dados para o processo de embalagem

Process ? X

Name: Embalagem Type: Standard

Logic

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

- Resource: Bancada, 1
- <End of list>

Adicionar... Editar... Apagar

Delay Type: Triangular Units: Minutes Allocation: Value Added

Minimum: 75 Value:(Most Likely): 90 Maximum: 105

☒ Report Statistics

OK Cancelar Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

As esperas de movimentação entre os processos obedecem à mesma distribuição, portanto todas podem ser alimentadas da mesma forma, como apresentado na Figura 1.24.

Figura 1.24 | Entrada de dados para a espera de movimentação entre os processos

Process ? X

Name: Aguardando transporte para Torno Type: Standard

Logic

Action: Delay

Delay Type: Expression Units: Minutes Allocation: Value Added

Expression: EXP(45)

☒ Report Statistics

OK Cancelar Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Pronto!

O modelo está construído e basta fazê-lo rodar para colher os relatórios sobre o comportamento do sistema ao longo da duração da simulação e verificar se existe o risco de gargalos na produção.

Avançando na prática

Inspeção de qualidade das peças

Descrição da situação-problema

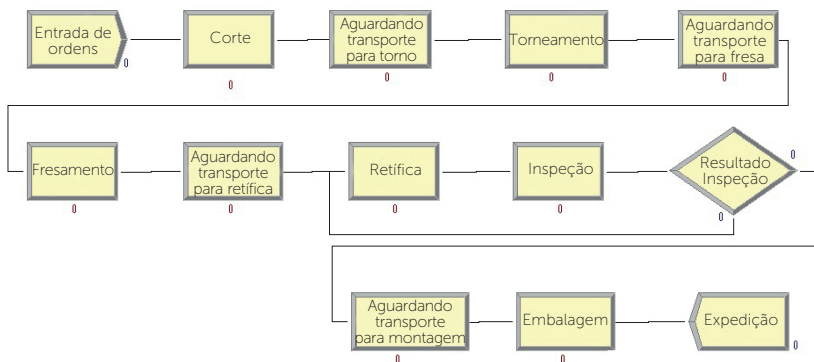
Preocupada em assegurar a qualidade do novo produto, a diretoria resolveu que deveria ser estudada a adição de um processo de inspeção após retífica (pois foi identificada como ponto crítico da qualidade) e antes da embalagem. O tempo de inspeção obedece a uma distribuição triangular com tempo mínimo de 5 minutos, tempo mais provável de 6,5 minutos e tempo máximo de 8 minutos. É sabido que existe uma falha de 7,5% no setor de retífica. Como ficará o modelo com essa nova etapa no processo?

Resolução da situação-problema

A adição da inspeção de qualidade pode ser vista na Figura 1.25.

As peças são inspecionadas, e caso o lote não seja aprovado ele retornará para ser retificada novamente, quando passará por nova inspeção.

Figura 1.25 | Modelo da simulação com a inspeção de qualidade



Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation, elaborada pelo autor.

Os dados referentes ao processo de inspeção são mostrados na Figura 1.26.

Figura 1.26 | Entrada de dados referente à inspeção de qualidade

Process ? X

Name: Inspeção Type: Standard

Logic:

Action: Seize Delay Release Priority: Medium(2)

Resources:

Resource: Inspetor_1
<End of list>

Adicionar...
Editar...
Apagar

Delay Type: Triangular Units: Hours Allocation: Value Added

Minimum: 5 Value:(Most Likely): 6.5 Maximum: 8

☒ Report Statistics

OK Cancelar Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

O processo de decisão da inspeção de qualidade é mostrado na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Informação de decisão da inspeção de qualidade

Decide ? X

Name: Resultado Inspeção Type: 2-way by Chance

Percent True (0-100): 92.5 %

OK Cancelar Ajuda

Fonte: captura de tela do programa Rockwell Automation (2018).

Faça valer a pena

1. Softwares para simulação são desenvolvidos desde o uso comercial (industrial) dos computadores no início da década de 1950, quando as linguagens Fortran e Algol foram bastante utilizadas no desenvolvimento de programas de simulação.

O Arena utiliza como base de construção de modelos:

- a) A linguagem Fortran.
- b) A linguagem Algol.
- c) O *General Purpose Simulation System* (GPSS).
- d) A Programação Visual.
- e) O Visual Basic.

2. Na área de trabalho são construídos os modelos, adicionando os módulos que compõem cada operação. Caso haja a necessidade de alterar o modelo, é nessa área que são efetuadas as mudanças. Na área de planilha do Arena são mostrados os detalhes dos módulos ativados na área de trabalho. É possível fazer alterações nos módulos a partir dessa área. Para isso, é preciso clicar no módulo em que deseja fazer a alteração.

O módulo correto para a entrada de dados referente à entrada no sistema simulado é:

- a) *Create*.
- b) *Process*.
- c) *Dispose*.
- d) *Separate*.
- e) *Decide*.

3. Na área de *templates* do software Arena encontram-se os módulos utilizados para a construção do modelo do sistema em estudo. Um dos módulos no *template Basic Process* visa a definir os dados relativos ao processo. Considere uma operação em que uma peça aguarda para ser processada, que esse processamento depende de uma máquina e um operador e que, após essa operação, a peça será encaminhada para o próximo processo.

Diante o exposto, qual deverá ser a opção escolhida na lógica de ação?

- a) *Delay*.
- b) *Seize Delay*.
- c) *Seize Delay Release*.
- d) *Delay Release*.
- e) *Seize Release*.

Referências

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR ISO 10006**: Gestão de qualidade: diretrizes para a qualidade no gerenciamento de projetos. Rio de Janeiro, 2000.

ANDRADE, E. L. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para análise de decisões. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015 (recurso eletrônico).

BATEMAN, R. E. et al. **Simulação de sistemas**: aprimorando processos de logística, serviços e manufatura. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013 (e-book).

FEITAL, A. Simulação de eventos discretos: teoria e aplicações. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ZE7fa5queRU>>. Acesso em: 20 set. 2018. **(Vídeo do Youtube)**

_____. Simulação de eventos discretos: tratamento de dados de entrada. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DbjhT8Xcw1Q>>. Acesso em: 21 set. 2018. **(Vídeo do Youtube)**

FIORONI, M. M. **Simulação da ampliação do Aeroporto de Guarulhos**. Disponível em: <<http://www.paragon.com.br/noticias-e-artigos/artigo-simulacao-da-ampliacao-do-aeroporto-de-guarulhos/>>. Acesso em: 20 set. 2018.

FREITAS FILHO, P. J. **Introdução à modelagem e simulação de sistemas com aplicações em Arena**. 2. ed. rev. e atual. Florianópolis: Visual Books, 2008.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. Porto Alegre: Bookman, 2013.

MOORE, J. H. **Tomada de decisão em administração com planilhas eletrônicas**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

NEUMANN, C. **Engenharia de produção**: 340 questões de concursos da Cesgranrio comentadas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

PRADO, D. S. **Usando o Arena em simulação**. 5. ed. Nova Lima: Falconi, 2014. – (Série Pesquisa Operacional, vol. 3) (e-book).

ROCKWELL AUTOMATION. **Arena**. 2018. Disponível em: <<http://www.paragon.com.br/c/downloads/>>

RODRIGUES, T. **Case Schneider**: modelagem e simulação do Centro Logístico Jaguaré da Schneider. Disponível em: <http://www.belge.com.br/IndLog_schneider_Port.php>. Acesso em: 21 set. 2018.

VARGAS, R. V. **Gerenciamento de projetos**: estabelecendo diferenciais competitivos. 7. ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2009 (e-book).

Programação dinâmica e programação não linear

Convite ao estudo

Começaremos uma nova unidade da disciplina Pesquisa Operacional: Simulação, em que trataremos da resolução de problemas através da programação dinâmica e da programação não linear.

A programação dinâmica é bastante versátil e permite resolver problemas lineares e não lineares, discretos ou contínuos, determinísticos e estocásticos, enfim quase todos os tipos de problemas de pesquisa operacional. Seu fundamento é subdividir, sequencialmente, em problemas menores os grandes problemas, resolver cada problema subdividido para se chegar a uma solução ótima e depois remontar o problema original, garantindo a solução ótima encontrada.

Na seção 1, começaremos aprendendo como resolver problemas através da programação dinâmica, seus conceitos e fundamentos. Na seção 2, serão estudados os problemas de programação não linear, que são problemas de otimização em que existem função não linear, seja na função objetivo ou nas funções de restrições. No final da Unidade, na seção 3, utilizaremos planilhas eletrônicas para auxiliar os cálculos e, para isso, aprenderemos como construir modelos no MS Excel.

Para facilitar o entendimento e ilustrar as aplicações da programação dinâmica, vamos imaginar o seguinte cenário: uma empresa fabrica diversos produtos voltados para a indústria metal-mecânica. A empresa possui uma frota própria de caminhões com objetivo de agilizar suas entregas e garantir sua pontualidade. Durante as seções desta unidade, aplicaremos a programação dinâmica para solucionar problemas de minimização de custos de transporte e, também, o estudo de

localização de uma nova unidade fabril de maneira a atender um maior número possível de localidades.

Para alcançarmos os resultados de aprendizagem, estudaremos os conceitos e fundamentos da programação dinâmica e suas aplicações; entenderemos as diferenças entre a programação dinâmica determinística e a probabilística. Aprenderemos os fundamentos da programação não linear, os tipos de problemas e como representar graficamente os problemas de programação não linear.

Ao final desta unidade, você estará apto a compreender e resolver os problemas de programação dinâmica e programação não linear de maneira consciente através de raciocínio crítico.

Pronto para começar?

Bons estudos!

Seção 2.1

Programação dinâmica

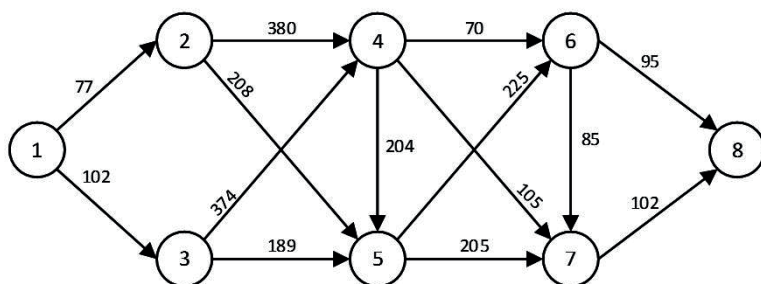
Diálogo aberto

Na década 1950, foi desenvolvido um novo método de solução de problemas de pesquisa operacional, conhecido como programação dinâmica. Essa nova metodologia de solução se mostrou bastante versátil, sendo possível sua aplicação em vários problemas lineares ou não, discretos ou contínuos, determinístico ou probabilístico.

Iniciaremos esta seção estudando os conceitos e fundamentos da programação dinâmica. Em seguida, conheceremos as programações dinâmicas determinística e probabilística (também conhecida como estocástica) e encerraremos vendo as aplicações da programação dinâmica. Com esse conhecimento, será possível determinar a rota de menor custo até chegar ao destino onde se localiza seu principal cliente.

Uma empresa que atua no setor metal-mecânico acaba de finalizar um estudo para a produção de um novo produto. Para agilizar a entrega para seu principal cliente, a empresa possui uma frota própria de caminhões. O cliente decidiu abrir um novo depósito em outra localidade (identificada com o número 8 na Figura 2.1) e a empresa deve definir uma rota de entrega (a partir de sua sede, marcada com o número 1 na Figura 2.1) que tenha o menor custo. As distâncias entre as diversas áreas localizadas durante o percurso da sede (1) até o novo depósito (8) estão identificadas acima das setas. A unidade de medida utilizada é o quilômetro. Para que o custo de transporte seja o mínimo possível, o percurso a ser percorrido deve ser o menor e, consequentemente, reduzir o custo com combustível e o salário dos motoristas. Seu desafio agora é programar uma nova rota até o novo depósito do cliente a partir da malha rodoviária apresentada a seguir na Figura 2.1.

Figura 2.1 | Malha rodoviária da empresa até o novo depósito do cliente



Fonte: adaptada de Abensur (2018, p. 101).

Portanto, seu desafio é programar a rota que apresente o menor custo através da programação dinâmica.

Leia atentamente o material didático e determine a rota da empresa até o novo depósito do cliente.

Mãos à obra e bom trabalho!

Não pode faltar

É intuitivo pensar que problemas menores são mais fáceis de serem resolvidos que grandes problemas, afinal tendem a apresentar um menor número de variáveis, o que pode tornar a formulação do modelo de solução mais simples. Portanto, seria muito interessante se pudéssemos subdividir um grande problema em vários problemas menores, resolvê-los e depois recompor o problema de maneira que a solução do grande problema esteja correta (COLIN, 2007). “Essa técnica matemática para tomar uma sequência de decisões inter-relacionadas é a base da programação dinâmica” (HILLIER, 2013, p. 404).

Conceitos e fundamentos da programação dinâmica

“A programação dinâmica é uma das técnicas de solução de problemas de otimização” (ARENALES et al., 2007, p. 375), assim como a programação linear, através de um procedimento para encontrar uma combinação de decisões ótimas (HILLIER, 2013). Por sua versatilidade, pode ser aplicada na solução de problemas de otimização linear ou não linear, com variáveis inteiras ou contínuas,

problemas determinísticos ou estocásticos, etc. (ARENALES et al., 2007, p. 375; COLIN, 2007, p. 238).

Entretanto, segundo Colin (2007), a versatilidade da programação dinâmica tem um preço: diferente dos problemas de programação linear, não existe uma formulação matemática “padrão” (HILLIER, 2013, pág. 404), tornando a formulação de cada problema com características bastante distintas umas das outras.

Podemos entender a programação dinâmica como uma técnica em que se aplica um método genérico para as soluções dos problemas, mas que utiliza equações distintas para cada tipo de situação.

A programação dinâmica consiste, portanto, na decomposição de um problema original em pequenos problemas sequenciais mais fáceis de serem resolvidos.

A criação da programação dinâmica é atribuída a Richard Bellman.

As principais características da programação dinâmica são:

- a. O problema original é dividido em **estágios**;
- b. Em cada estágio está associado um número de **estados** que representam todas as condições possíveis de um sistema em cada estágio;
- c. Em cada estágio, considerando as informações iniciais, tomam-se as **decisões** que trarão os melhores resultados. As decisões procuram alterar o estado atual em outro estado associado ao próximo estágio (FÁVERO; BELFIORE, 2013);
- d. A **transição** é “a fórmula de recorrência que determina a mudança de valores das variáveis do estágio atual para o estágio seguinte” (ABENSUR, 2018, p. 100);
- e. **Princípio de Otimalidade:** dado o estado atual, uma decisão ótima para o estágio futuro independe das decisões adotadas nos estágios anteriores. Podemos concluir que a decisão imediata ótima depende somente do estado atual e não das passadas (HILLIER, 2007).

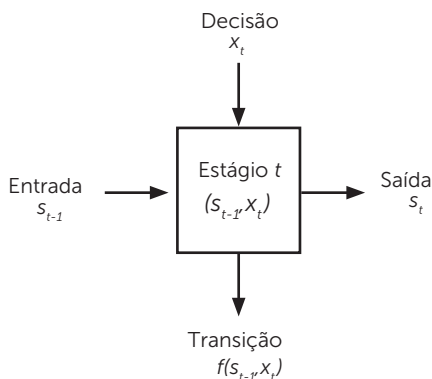
O processo de solução da programação dinâmica pode ser do tipo **regressivo (backward)**, quando se determina a solução ótima de cada estágio a partir do último estado até encontrar a solução ótima do estágio inicial; ou do tipo **progressivo (forward)** quando o processo tem início pelo primeiro estágio e prossegue até a solução ótima do estágio final (FÁVERO e BELFIORE, 2013, p. 469). Ambos procedimentos levarão

ao mesmo resultado, e apesar do tipo progressivo ser mais lógico e intuitivo, o tipo regressivo tem tido maior aplicação na literatura devido a sua eficiência nos cálculos computacionais (FÁVERO; BELFIORE, 2013, p. 469; ABENSUR, 2018, p. 104).

A última característica diz respeito à **recursividade**, ou **relação recursiva**, que identifica a solução ótima do estágio t , dado a solução ótima para o estágio $t+1$ (HILLIER, 2007, p. 410).

A Figura 2.2 apresenta o caso genérico de um estágio t em uma Programação Dinâmica.

Figura 2.2 | Representação genérica de estágio t



Fonte: adaptada de Colin (2007, p. 239).

Para a resolução dos problemas de programação dinâmica será utilizado a seguinte notação:

T – número total de estágios

t - estágio atual ($t = 1, \dots, T$)

s_t - estado do estágio t

x_t - variável de decisão no estágio t

$x_t^*(s_t)$ - valor ótimo de x_t dado s_t

$f_t(s_t, x_t)$ - função objetivo acumulada na forma recursiva dos estágios

A função objetivo irá variar de acordo com cada problema e pode ser expressa segundo a equação genérica:

$$f_t^*(s_t) = \max_{x_t} \text{ ou } \min_{x_t} \{f_t(s_t, x_t)\} \text{ dado } s_t$$

Por ser uma expressão genérica, a função objetivo poderá ser de maximização (por exemplo, maximizar o lucro), ou minimização (como minimizar custos, por exemplo) conforme o problema a ser resolvido.

As decisões ótimas tomadas em cada estágio podem ser tabuladas como visto no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 | Quadro contendo os resultados em cada estágio

s_t x_t	$f_t(s_t, x_t)$	$f_t^*(s_t)$	$x_t^*(s_t)$
	...		
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 469) e Hillier (2007, p. 411).



Assimile

Grandes problemas que demandam vários cálculos e métodos podem ser resolvidos por programação dinâmica, que os subdivide em problemas menores, conhecidos como estágios, e mais simples de serem resolvidos. Cada estágio está associado aos estados que representam as condições possíveis de cada estágio do sistema. A resolução da programação dinâmica pode ser feita de forma progressiva (do estágio inicial até o estágio final) ou de forma regressiva (do último estágio em direção ao primeiro), independente da forma, ambas trarão o mesmo resultado, graças à recursividade que identifica a solução ótima do estágio t , dado a solução ótima para o estágio $t + 1$.

É de máxima importância lembrar que a função varia para cada tipo de problema.

Programação Dinâmica Determinística

Nos problemas de programação dinâmica determinística, o estado do estágio seguinte será determinado pelo estado e decisão a ser adotada do estágio atual. Em outras palavras, na programação dinâmica determinística, admitimos que todos os termos e variáveis são conhecidos com certeza, e esse grau de certeza assegura conhecer completamente o estado em cada estágio.

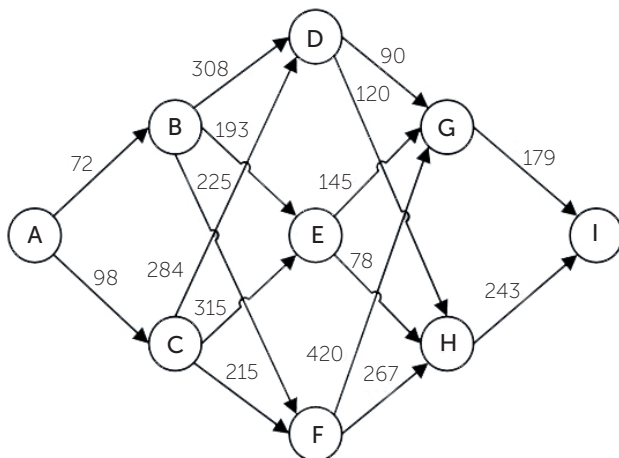


Exemplificando

O problema do caminho mínimo, ou caminho mais curto, é um dos problemas que podem ser resolvidos através da programação dinâmica.

Vejamos um exemplo: uma transportadora atende várias cidades, conforme mostra a Figura 2.3. A sede da transportadora fica em A, e as distâncias entre as cidades estão indicadas em quilômetros. Qual deve ser a rota para chegar a cidade I, a partir da sede que tenha a menor distância?

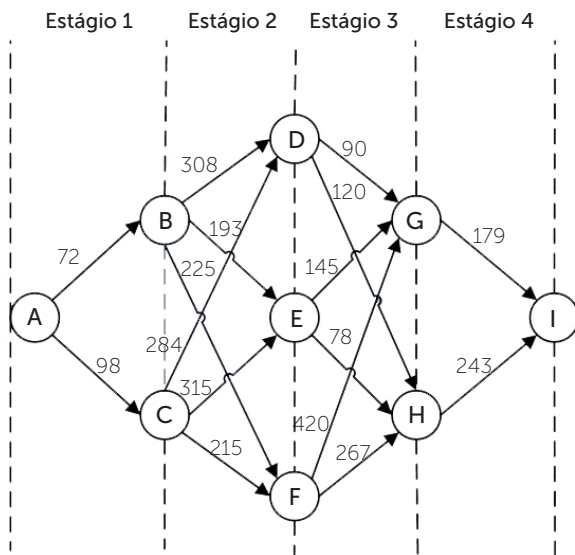
Figura 2.3 | Cidades entre a sede em A e o destino I



Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013, p. 470).

Para a resolução do problema, inicialmente é preciso decompô-lo em problemas menores. No caso, é possível dividir o problema em quatro estágios, conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4 | Estágios do problema original



Fonte: baseado em Fávero e Belfiore (2013, p. 471).

Resolveremos o problema através da recursão regressiva, ou seja, iniciando a solução do estágio 4 para o estágio 1.

No estágio 4, temos dois estados (nós G e H) e uma decisão a ser tomada (x_4) para se chegar ao nó I.

Os resultados estão no Quadro 2.2.

Quadro 2.2 | Resultados do estágio 4

$s_4 \backslash x_4$	x_4	$f_4(s_4, x_4)$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*(s_4)$
		I		
G		179	179	I
H		243	243	I

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

No estágio 3, o estado s_3 é representado pelos nós D, E e F e a decisão pelos nós G e H. O Quadro 2.3 explica como é calculado as distâncias a partir da distância associada ao estágio 4.

Quadro 2.3 | Resultados do estágio 3

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3, x_3)$		$f_3^*(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
	G	H		
D	$90 + 179 = 269$	$120 + 243 = 363$	269	G
E	$145 + 179 = 324$	$145 + 243 = 388$	324	G
F	$420 + 179 = 599$	$267 + 243 = 510$	510	H

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

O mesmo é feito no estágio 2 quando o estado s_2 é representado pelos nós B e C e a decisão pelos nós D, E e F. Os resultados são apresentados no Quadro 2.4.

Quadro 2.4 | Resultados do estágio 2

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2)$			$f_2^*(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
B	$308 + 269 = 577$	$193 + 324 = 517$	$225 + 510 = 735$	517	E
C	$284 + 269 = 553$	$315 + 324 = 639$	$215 + 510 = 725$	553	D

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

Por fim, de maneira similar, no estágio 1 o estado s_1 é representado pelo nó A, e a decisão x_1 corresponde ao nó B ou C. O resultado é apresentado no Quadro 2.5.

Quadro 2.5 | Resultados do estágio 1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1)$		$f_1^*(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
	B	C		
A	$72 + 517 = 589$	$98 + 553 = 651$	589	B

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

Calculado os resultados de todos os estágios, o caminho mais curto é representado por:

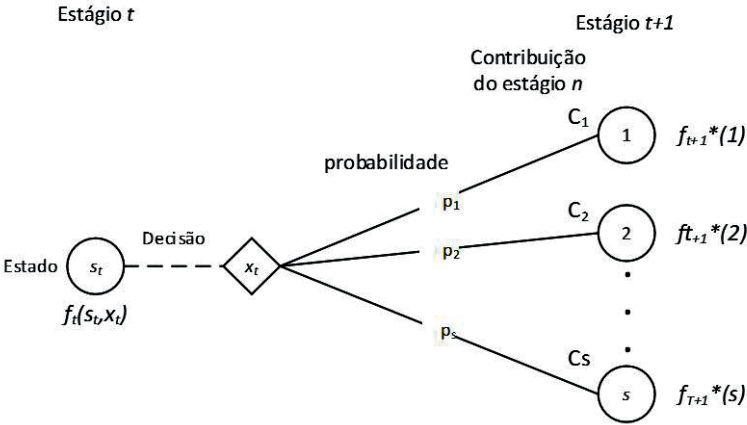
A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ G $\rightarrow$ I, que totaliza: 589 quilômetros.

Programação Dinâmica Probabilística

Diferentemente do que foi visto na programação dinâmica determinística, na probabilística (ou, estocástica) não há conhecimento exato de todos os termos da equação recursiva. Em vez da certeza, o estado é descrito segundo uma função de distribuição (HILLIER, 2013, p. 431). Um exemplo de aplicação da programação dinâmica probabilística (ou estocástica) é a programação da produção quando a demanda em um determinado período não pode ser conhecida com certeza (ARENALES, 2007, p. 407).

A estrutura básica da Programação Dinâmica Probabilística pode ser observada na Figura 2.5. Quando a estrutura básica é expandida de forma a incluir todos os estados e decisões possíveis em todos os estágios, a estrutura final contendo todos os estágios é conhecida como árvore de decisão (HILLIER, 2013, pág. 431).

Figura 2.5 | Estrutura básica para Programação Dinâmica Probabilística



Fonte: adaptada de Hillier (2007, p. 431).

As decisões são tomadas em um ambiente de incertezas quanto a ocorrência exata de um estado para o qual o sistema evolui. O estágio seguinte ocorre segundo uma certa probabilidade, ou seja, segundo uma variável aleatória com uma certa distribuição de probabilidade (ARENALES, 2007, p. 407).



Refleta

A aplicação da programação dinâmica probabilística é realizada dentro de um cenário de incerteza quanto ao estado seguinte no qual o sistema evolui, segundo uma distribuição de probabilidade. Se não é possível ter certeza quanto ao ambiente em que se tomará a decisão, como podemos esperar uma solução ótima para o problema?

Aplicação da Programação Dinâmica

Vimos anteriormente que a programação dinâmica apresenta muita versatilidade e que pode ser aplicada em problemas com variáveis discretas ou contínuas, problemas lineares e não lineares, problemas determinísticos e estocásticos, enfim, em diversos tipos

de problemas de pesquisa operacional. As aplicações, portanto, estão nas mais diversas áreas como na solução de problemas relacionados ao planejamento da produção, na determinação de tamanhos de lotes de produção, na gestão de estoques, na alocação de recursos, na gestão de projetos, na determinação da confiabilidade de um sistema de comunicação, enfim, as mais variadas aplicações.



Pesquise mais

Assista ao vídeo que mostra, de forma clara e simples, a aplicação de uma árvore de decisão em situações reais vividas por empresas.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dJxHpFZx__U>.
Acesso em: 27 jul. 2018.

Os problemas de programação dinâmica podem ser solucionados com o auxílio de planilhas eletrônicas como o Microsoft Excel ou por softwares de otimização como o LINDO. Devido à grande popularização do Excel, veremos na seção 3 como modelar problemas de programação dinâmica no Excel.

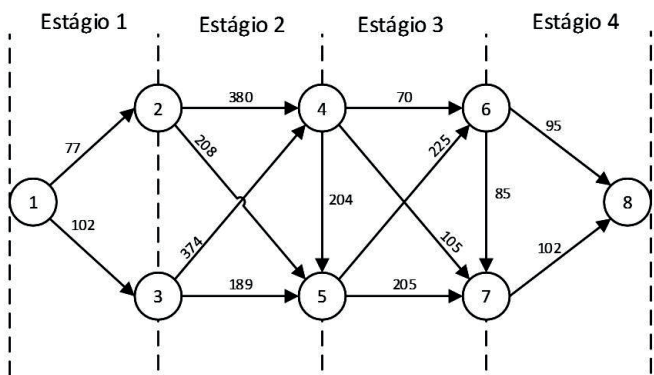
Sem medo de errar

O principal cliente da empresa construiu um depósito para onde deve ser encaminhado o novo produto desenvolvido pela sua empresa. Por conta disso, houve a necessidade de um projeto de simulação da produção que você ajudou a construir. Agora, cabe a você calcular a rota que represente o menor custo de transporte entre a sede da empresa e o novo depósito do cliente. A malha rodoviária foi apresentada na Figura 2.1.

Para determinar a rota com o menor custo, podemos utilizar a programação dinâmica com o objetivo de minimizar a distância entre a sede e o depósito. Usaremos o método da recursão regressiva para solucionar o problema.

Inicialmente, subdividiremos o problema original em estágios menores, conforme a Figura 2.6.

Figura 2.6 | Problema original subdividido em estágios



Fonte: adaptada de Abensur (2018, p. 104).

No estágio 4, temos dois estados (nós 6 e 7) e uma decisão a ser tomada (x_4) para se chegar ao nó 8.

Os resultados estão no Quadro 2.6.

Quadro 2.6 | Resultados do estágio 4

s_4	x_4	$f_4(s_4, x_4)$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*(s_4)$
		8		
6		95	95	8
7		102	102	8

Fonte: elaborado pelo autor.

No estágio 3, o estado s_3 é representado pelos nós 4 e 5 e a decisão pelos nós 6 e 7. O Quadro 2.7 explica como são calculadas as distâncias a partir da distância associada ao estágio 4.

Quadro 2.7 | Resultados do estágio 3

s_3	x_3	$f_3(s_3, x_3)$		$f_3^*(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
		6	7		
4		$70 + 95 = 165$	$105 + 102 = 207$	165	6
5		$225 + 95 = 320$	$205 + 102 = 307$	307	7

Fonte: elaborado pelo autor.

No estágio 2, quando o estado s_2 é representado pelos nós 2 e 3 e a decisão, pelos nós 4 e 5. Os resultados são apresentados no Quadro 2.8.

Quadro 2.8 | Resultados do estágio 2

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2, x_2)$		$f_2^*(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
	4	5		
2	$380 + 165 = 545$	$208 + 307 = 515$	515	5
3	$374 + 165 = 539$	$189 + 307 = 496$	496	5

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

Finalmente, no estágio 1 o estado s_1 é representado pelo nó 1, e a decisão x_1 corresponde ao nó 2 ou 3. O resultado é apresentado no Quadro 2.9.

Quadro 2.9 | Resultados do estágio 1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1, x_1)$		$f_1^*(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
	2	3		
1	$77 + 515 = 592$	$102 + 496 = 598$	592	2

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).

Calculados os resultados de todos os estágios, o caminho mais curto é representado por:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$, que totaliza: 592 quilômetros.

Parabéns! Você acaba de achar a melhor rota da sede da empresa até o depósito do cliente.

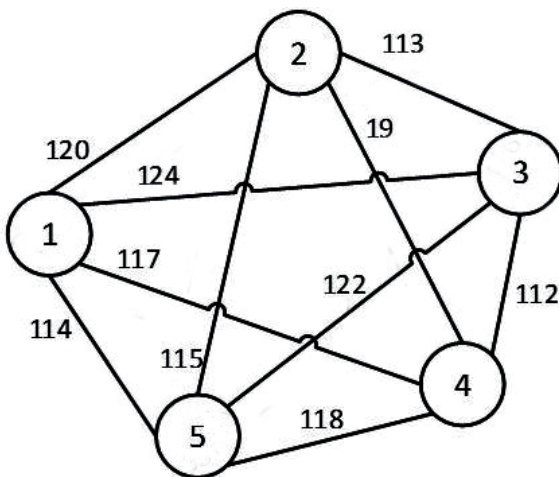
Avançando na prática

Problema do Caixeiro Viajante.

Descrição da situação-problema

Vamos imaginar que a empresa deva fazer as entregas para outros clientes que estão localizados em cidades distintas conforme a Figura 2.7. O veículo deve fazer as entregas e depois retornar para a sede da empresa (nó 1). Qual o menor caminho a ser percorrido, de forma seja feita a entrega para todos os clientes, sem passar pela mesma cidade mais de uma vez?

Figura 2.7 | localidades a serem atendidas pela empresa

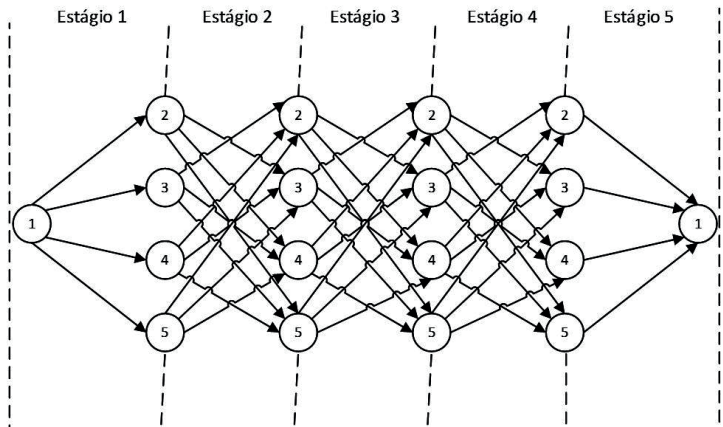


Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013, p. 474).

Resolução da situação-problema

Para solucionar mais esse desafio, é preciso inicialmente subdividir o problema em estágios conforme a Figura 2.8.

Figura 2.8 | Problema subdividido por estágios



Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013, p. 476).

Note que, como o veículo deve retornar a sede após as entregas, o estágio final deve seguir até o nó 1, onde está localizada a sede da empresa.

Resolvendo pelo tipo regressivo, o primeiro estágio a ser decidido é o estágio final, 5, conforme o Quadro 2.10.

Quadro 2.10 | Solução para o estágio 5

s_5	x_5	$f_5(s_5, x_5)$	$f_5^*(s_5)$	$x_5^*(s_5)$
		1		
	2	120	120	1
	3	124	124	1
	4	117	117	1
	5	114	114	1

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013, p. 476).

O desenvolvimento da continuação do problema segue a mesma metodologia apresentada nos exemplos passados, mas que requer uma atenção a mais. No desenrolar das soluções, devemos tomar cuidado com o fato de que uma cidade só pode ser visitada somente uma vez, portanto, para as soluções, onde exista a necessidade de passar uma segunda vez por uma localidade já visitada, devem ser consideradas ineficazes.

Ao final temos como solução a rota: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Faça valer a pena

1. Uma das maiores vantagens da programação dinâmica é sua versatilidade, podendo ser aplicada na solução de diversos tipos de problemas na pesquisa operacional. Problemas de otimização linear, não linear, com variáveis inteiras, contínuas, determinísticos ou estocásticos podem ser solucionados pela programação dinâmica.

Apesar de muito útil, a versatilidade da programação dinâmica tem um inconveniente. Qual é esse inconveniente?

- a) A dificuldade na construção de um modelo matemático.
- b) A necessidade de um modelador experiente pela dificuldade em examinar o cenário.
- c) Não existe uma formulação matemática “padrão”, sendo necessária a formulação de cada problema com características bastante distintas umas das outras.
- d) A falta de campo de atuação real, servindo somente para cenários hipotéticos conceituais.
- e) A dificuldade em gerar relatórios devido ao conflito de dados e informações que alimentam o modelo.

2. O processo de solução da Programação Dinâmica pode ser do tipo Regressivo (*backward*), quando a solução ótima de cada estágio é determinada a partir do último estado evoluindo até encontrar a solução ótima do estágio inicial; ou do tipo Progressivo (*forward*) quando o processo tem início pelo primeiro estágio e prossegue até a solução ótima do estágio final.

Apesar de ambos tipos alcançarem o mesmo resultado, o tipo Regressivo tem tido maior aplicação. Por quê?

- a) Devido à facilidade na construção do modelo.
- b) Devido a sua eficiência nos cálculos computacionais.
- c) Devido à rapidez no desenvolvimento da solução.
- d) Devido à racionalidade do desenvolvimento do processo.
- e) Por gerar soluções mais completas.

3. A lógica para a solução dos problemas envolvendo programação dinâmica é subdividir um problema de grande porte em problemas menores, chamados de estágios, e determinar a solução ótima para cada estágio, tornando a decisão uma sequência inter-relacionada de decisões.

Qual a alternativa correta no que diz respeito ao princípio de otimalidade aplicado na programação dinâmica?

- a) Dado o estado atual, uma decisão ótima para o estágio futuro independe das decisões adotadas nos estágios anteriores.
- b) Dado o estado atual, uma decisão ótima para o estágio futuro depende das decisões adotadas nos estágios anteriores.
- c) Dado o estado futuro, uma decisão ótima para o estágio atual independe das decisões adotadas nos estágios anteriores.
- d) Dado o estado futuro, uma decisão ótima para o estágio atual depende das decisões adotadas nos estágios anteriores.
- e) Uma decisão ótima para o estágio futuro independe das decisões adotadas em quaisquer estágios.

Seção 2.2

Introdução à programação não linear

Diálogo aberto

Caro estudante, no início da nossa caminhada pelo estudo da pesquisa operacional, aprendemos a solucionar os problemas de Programação Linear e vimos que tanto a função objetivo quanto as restrições dos problemas são funções lineares. Porém a linearidade “pode ser considerada uma exceção relevante dentro do universo curvo” (ABENSUR, 2018, p. 115). Dito de outra forma, os problemas que podem ser resolvidos pela Programação Linear, ainda que em grande escala, são de menor frequência que os problemas solucionados pela Programação Não Linear (PNL).

Vamos imaginar um problema em que a função objetivo envolve a maximização do aproveitamento de material para produzir uma embalagem de um produto a granel, tipo barrica de papelão utilizado para armazenar tinta em pó para pintura eletrostática, onde a base é circular e altura pode variar. Podemos notar que, para calcular a quantidade do material necessário, não será uma função linear pois a área da base circular é πr^2 . Portanto, para problemas dessa natureza, é necessário utilizarmos uma solução diferente da Programação Linear.

Veremos nessa seção os conceitos e fundamentos da Programação Não Linear, como podem ser representados graficamente esses problemas, os tipos de problemas da Programação Não Linear e as aplicações mais frequentes.

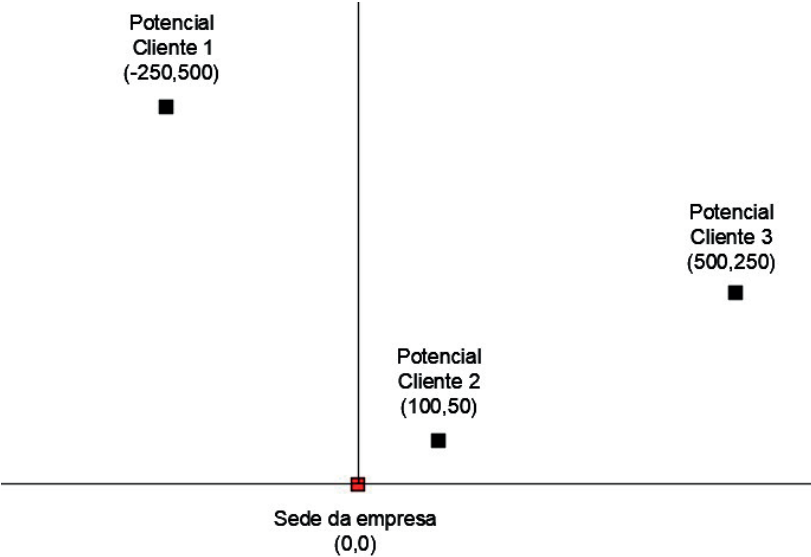
Vamos relembrar a empresa que atua no setor metal-mecânico, ela planeja construir uma nova unidade fora do estado em que atua com o objetivo de ampliar a sua participação no mercado. Considerando a sede como referência (ponto 0,0), seus clientes potenciais estão localizados conforme o Quadro 2.11 e a Figura 2.9. Por questões mercadológicas, a empresa impõe que a nova unidade não deva estar a uma distância maior que 300 km de seus potenciais clientes.

Quadro 2.11 | Posição dos potenciais clientes em relação à sede da empresa em km

CLIENTE	X	Y
1	-250	500
2	100	50
3	500	250

Fonte: adaptado de Lachtermacher (2002, p. 310).

Figura 2.9 | Localização dos potenciais clientes em relação a sede da empresa em km



Fonte: adaptada de Lachtermacher (2002, p. 311)

Por conta dos bons trabalhos realizados anteriormente, você foi escolhido pela diretoria para realizar o estudo e, agora, cabe a você, inicialmente, construir o modelo matemático que definirá a localidade da nova unidade. Considere que a menor distância entre a nova unidade e os potenciais clientes levarão a um menor custo de transporte.

Aplique o seu conhecimento para vencer mais esse desafio profissional.

Bons estudos!

Não pode faltar

Já estudamos como solucionar uma grande variedade de problemas pela Programação Linear, Programação Inteira, Binária e Mista, e, em todos os problemas apresentados, tanto a função objetivo quanto as restrições eram funções lineares. Entretanto, existem inúmeros outros problemas em que a função objetivo ou as restrições não são lineares e, portanto, não é possível aplicar as técnicas apresentadas anteriormente.

Nessa seção veremos os problemas de pesquisa operacional que são resolvidos pela Programação Não Linear.

Conceitos e fundamentos da Programação Não linear

A fundamentação central da Programação Linear é a compreensão que tanto a função objetivo como as restrições são funções lineares. Os problemas de Programação Não Linear (PNL) são muito parecidos com a Programação Linear, a diferença está no fato de possuir ao menos uma relação não linear entre as variáveis seja na função objetivo ou nas restrições (COLIN, 2007, p. 301). A suposição da linearidade permite solucionar um grande número de problemas práticos, entretanto, ela não se verifica frequentemente (HILLIER, 2013, p. 512).

Genericamente, pode-se definir o problema de PNL como identificar os $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de modo a satisfazer:

$$\max Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

Sujeito a: $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$

...

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

Em que $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$ é um valor constante e pelo menos uma das equações $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ possui uma relação não linear (COLIN, 2007, p. 301; HILLIER, 2013, p. 512). Por exemplo, caso a função objetivo seja: $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2x_3$, corresponde a uma função linear.

Problemas de Programação Não Linear apresentam-se mais complexos e são mais difíceis de serem resolvidos (FÁVERO e BELFIORE, 2013, p. 424; COLIN, 2007, p. 277). Existem vários tipos diferentes de problemas dependendo das características de $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$, e são usados diferentes tipos de algoritmos na resolução de cada tipo de problema, o que torna os problemas de Programação Não Linear um grande desafio (HILLIER, 2013, p. 512).

Vejamos alguns exemplos de modelos de problemas de Programação Não Linear (LACHTERMACHER, 2002, p. 278):

Exemplo 1:

$$\max \sqrt{x_1 + x_2 + x_3}$$

$$e^{x_1} + x_2 + x_3 \leq 43$$

$$\text{sujeito a: } x_1, x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

No exemplo 1, a função objetivo é uma maximização e deve ser obtida através de uma raiz quadrada; e a primeira restrição é uma potencialização. Ambas são funções não lineares.

Exemplo 2:

$$\max \log x_1 + x_2 \frac{x_3}{4} + x_4^2$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 50$$

$$\text{sujeito a: } x_1 + 2x_2x_3x_4 \leq 30$$

$$3x_1 + \sqrt{x_3} \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

No exemplo 2, na função objetivo podemos notar a necessidade de calcularmos o logaritmo de uma variável e a presença de produtos e divisões de variáveis; e nas restrições temos produtos entre variáveis e o cálculo de raiz. Todas funções não lineares



Reflita

Problemas de Programação Não Linear foram apresentados como problemas onde existe ao menos uma função não linear seja na função objetivo, ou nas restrições. Como deveríamos tratar os problemas quando existem funções não lineares tanto na função objetivo quanto nas funções de restrições?

Representação gráfica de problemas de Programação Não linear

Problemas de Programação Não Linear que apresentem somente uma ou duas variáveis podem ser solucionados graficamente.

De maneira similar aos problemas de Programação Linear solucionados graficamente, é preciso plotar em um gráfico a função objetivo e as restrições do problema, e então identificar a solução ótima na zona de respostas viável.



Exemplificando

Considerando o problema de Programação Não Linear, em que a função objetivo é uma função linear, mas uma das restrições é uma função não linear (FÁVERO e BELFIORE, 2013, p. 425):

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$10x_1^2 + 8x_2^2 \leq 128$$

$$\text{sujeito a: } x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Determine graficamente a solução.

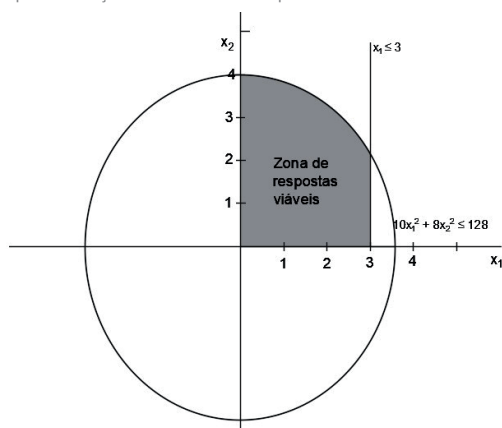
Uma das restrições é representada graficamente por uma elipse.

Para determinar a posição dos eixos da elipse, “zeramos” o valor de x_1 e obtemos o valor $x_2 = 4$. Fazemos o mesmo “zerando” x_2 e obtendo $x_1 = 3,577$.

A outra restrição é uma reta de valor 3.

A representação da zona de respostas viáveis limitada pelas restrições pode ser vista na Figura 2.10.

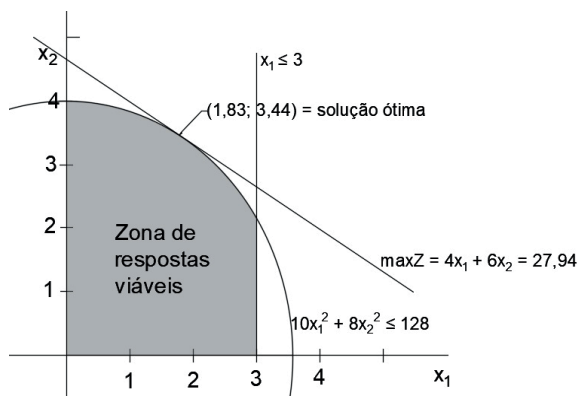
Figura 2.10 | Representação da zona de respostas viáveis



Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013, p. 425).

A solução dos problemas de Programação Linear se localizava em um dos postos extremos no polígono formado pelas funções lineares das restrições. Posicionando a reta da função objetivo, é possível identificar a solução ótima do problema. Entretanto, como se vê na Figura 2.10, existe uma função curva (não linear), juntamente com uma função linear que forma a zona de respostas viáveis do problema. Neste caso, a solução do problema não estará em dos extremos da região factível, e sim na superfície da curva, conforme ilustrado na Figura 2.11.

Figura 2.11 | Solução gráfica do problema



Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013, p. 425).

Como comentado, os problemas de Programação Não Linear são de difícil resolução e no presente exemplo notamos que encontrar o ponto que representa a solução ótima na superfície da curva não é tarefa simples. Em muitos casos é necessário o auxílio de computador para localizar o ponto de encontro entre a função não linear (curva) e a função linear (reta).

Tipos de problemas de programação não linear

Os problemas de Programação Linear podem ser solucionados utilizando um único algoritmo, o SIMPLEX, que, apesar de trabalhoso e repetitivo, é aplicável em qualquer cenário envolvendo funções lineares. Entretanto, nos problemas de Programação Não Linear, não existe um algoritmo único capaz de ser aplicado em todos os problemas, em vez disso foram desenvolvidos algoritmos para vários tipos individuais de problemas de Programação Não Linear (HILLIER, 2013, p. 522).



Assimile

Diversos problemas de Programação Não Linear são resolvidos através de cálculo diferencial. É aconselhável que você faça uma boa revisão dos conceitos de limites e derivadas para compreender o que está sendo apresentado nesta seção e na próxima seção quando estudaremos as programações côncava, convexa e quadrática

Programação irrestrita com uma única variável – como o nome sugere, problemas de otimização irrestrita não apresentam restrições, de maneira que o objetivo do problema é simplesmente em função que busca otimizar uma função não linear com uma única variável (FÁVERO e BELFIORE, 2013, p. 433): **max** ou **min** $f(x)$

Considerando uma função $f(x)$ derivável, para que a solução de $f(x)$ seja ótima, ela deve satisfazer: $\frac{df(x^*)}{dx} = 0$, onde x^* é conhecido como ponto estacionário.

Uma vez calculada a solução ótima pela derivada da função, também é possível determinar se a solução ótima é um ponto de máximo, mínimo ou de inflexão, calculando a derivada de primeira ordem, segunda ordem... até que se chegue a uma constante positiva, negativa ou nula. Para fixar melhor a ideia, assista ao vídeo sugerido no box "Pesquise mais".

Programação irrestrita com múltiplas variáveis – de maneira semelhante à otimização irrestrita com uma variável, buscando otimizar uma função não-linear com n variáveis: **max ou min** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Para solucionar o problema e chegar à solução ótima, basta solucionar, na forma analítica, o sistema de n equações com n incógnitas:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

...

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

Onde $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, para $i = 1, 2, \dots, n$ são as derivadas parciais de $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ em relação à x_i .

Da mesma forma como é resolvida em problema de Programação Não Linear irrestrita com uma variável, para achar se a solução ótima é de máximo, mínimo ou de inflexão, basta derivar sequencialmente (para cada variável x_i) até que o valor da derivada parcial na ordem $n \left(\frac{\partial^n}{\partial x_i^n} f(X^*) \right)$ seja uma constante (positiva, negativa ou nula).

Se n é par e a derivada parcial encontrada para cada x_i é positiva, os pontos de x^* são de mínimo;

Se n é par e a derivada parcial encontrada para cada x_i é negativa, os pontos de x^* são de máximo;

Se n é ímpar para cada x_i , os pontos de x^* são de inflexão.

Como exemplo de aplicação da Programação Irrestrita podemos citar o investimento em propaganda segundo a sensibilidade do

consumidor (COLIN, 2007) quando uma agência de propaganda, através de estudos, chegou às relações entre despesas com propaganda e vendas em duas regiões 1 e 2:

$$v_1 = 10 + 5p_1 - 1,5p_1^2 \quad \text{onde } v \text{ refere-se à vendas e } p \text{ ao}$$

$$v_2 = 12 + 4p_2 - 0,5p_2^2$$

investimento em propaganda.

Programação restrita - Problemas de programação restrita procuram otimizar uma função linear ou uma função não linear com diversas variáveis, sujeitos a restrições. Nestes problemas, a função objetivo ou uma das variáveis são função não linear.

$$\text{Max ou Min } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeito a:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

A otimização do custo da matéria prima utilizada em embalagens é um dos exemplos de aplicação da Programação Irrestrita.

As Programações Quadrática, Côncava e Convexa são problemas típicos de Programação Não Linear com restrição e serão estudadas na próxima seção desta unidade.

Para confirmar se a solução do problema de Programação Não Linear é um ponto ótimo são verificadas as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (FÁVERO e BELFIORE, 2013, p. 440).

Inicialmente, o problema deve estar modelado matematicamente conforme a seguir:

$$\max z f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeito a:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

...

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Conforme Colin (2007 apud FAVERO; BELFIORE 2013), a solução $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ é ótima se, e somente se, existirem as constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\text{Condição 1 de KKT: } \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j} \leq 0, \\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Condição 2 de KKT: } x_j^* \left(\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j} \right) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Condição 3 de KKT: } \lambda_i [b_i - g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{Condição 4 de KKT: } \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Qualquer solução $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ que satisfaça as quatro condições de KKT é chamada de ponto KKT.



Pesquise mais

A resolução de problemas de Programação Não Linear, muitas vezes, depende do entendimento dos conceitos de limites e derivadas. Para entender a montagem do modelo que calcula o volume máximo de uma caixa a partir de uma placa retangular, assista a parte 1 do vídeo *Otimização: volume de uma caixa*. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/differential-calculus/derivative-applications-dc/modal/v/optimizing-box-volume-graphically>>. Acesso em: 10 ago. 2018.

Na segunda parte do vídeo, é calculado o volume através da aplicação de derivada. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/differential-calculus/derivative-applications-dc/modal/v/optimizing-box-volume-analytically>>. Acesso em: 10 ago. 2018.

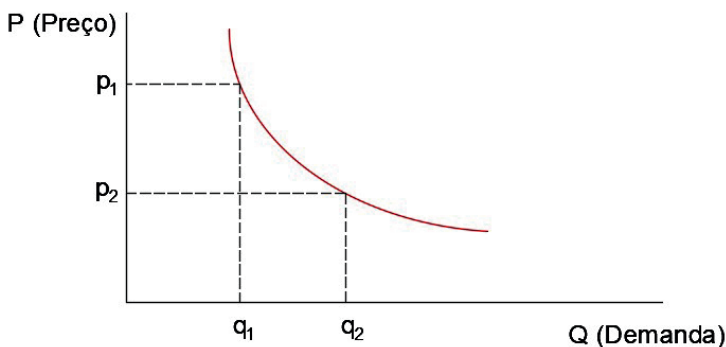
Aplicações da Programação Não Linear

São muitas as aplicações da Programação Não Linear. A seguir serão apresentados dois exemplos, de muitos existentes, de problemas que apresentam funções não lineares na sua concepção:

Problemas de elasticidade de preços da demanda – existe em economia um conceito conhecido como Lei Geral da Demanda

que, resumidamente, descreve a relação inversa entre o preço praticado no mercado e a quantidade demandada pelo bem. A elasticidade de preços mede a variação da demanda quando existe a variação do preço. Grosso modo, se o preço de um bem subir, terá como consequência uma diminuição na venda por conta desse aumento, enquanto a recíproca é verdadeira, se o preço baixar, haverá um aumento na venda desse produto. A função que descreve a elasticidade de preço não é uma função linear, pois existe um limite na demanda e, independentemente de o preço baixar muito, a demanda não aumentará, conforme pode ser visto na Figura 2.12.

Figura 2.12 | Curva de elasticidade de preço



Fonte: elaborada pelo autor.

Problemas envolvendo custos marginais – o custo marginal é definido como o acréscimo do custo total quando se fabrica uma unidade adicional do produto (VICENCONTI, 2013, p. 97). Para ficar mais claro, imaginemos que uma empresa esteja atuando com sua capacidade máxima. Nesta situação, os custos de fabricação sofrem apenas pequenas variações. Entretanto, se a empresa precisar fabricar um único produto a mais, será necessário o investimento na compra de equipamento, contratação de mão de obra, aumento na área fabril, etc. Estes gastos afetarão diretamente o custo de fabricação. Esses custos a mais são os custos marginais. Portanto, fica óbvio que situações que envolvem os custos marginais não envolvem uma função linear, impossibilitando a solução através da Programação Linear.

Sem medo de errar

A sua empresa planeja ampliar a atuação no mercado. Para atingir essa meta, deseja conquistar novos clientes e pensa em construir sua nova unidade próxima dos potenciais clientes.

Você foi designado para desenvolver o modelo matemático para escolher a melhor localidade.

A empresa deduz que a menor distância entre a nova unidade e os potenciais clientes levarão a um menor custo de transporte. É imposição da empresa que a nova unidade não deva estar distante mais do que 250 km dos potenciais clientes.

Para solucionar esse desafio, primeiro devemos recordar um dos conceitos básicos da geometria analítica que diz que: “a menor distância entre dois pontos é uma reta”. Portanto, construiremos o modelo matemático considerando que a menor distância entre os potenciais clientes e a nova unidade será uma reta, desconsiderando as curvas das estradas que as ligam.

As posições dos potenciais clientes foram postas em um plano cartesiano, juntamente com a atual sede da empresa, que é marcada pela origem das coordenadas (0,0), conforme pode ser visto na Figura 2.9 na seção “Diálogo Aberto”.

Para efeito de modelagem, o potencial cliente 1 está na posição (x_1, y_1) que, numericamente, é representado como (-250, 500). De maneira análoga, os clientes 2 e 3 estão em (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , respectivamente, ou seja, em (100, 50) e (500, 250).

A distância entre dois pontos (i e j) em um plano cartesiano é dado pela equação $d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

A posição da nova unidade estará em (X, Y) . Portanto, as distâncias entre os clientes potenciais e a nova unidade serão:

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2} ; \sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2} \text{ e } \sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2}$$

Como a distância entre a nova unidade e os potenciais clientes deve ser a mínima possível, a função objetivo é representada pela equação:

$$\text{Min}Z = \sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2} + \sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2} + \sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2}$$

A condição é de que a distância entre a nova unidade e os potenciais não deve ultrapassar 300 km. Portanto:

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2} \leq 300$$

Para finalizar a construção do modelo matemático, substituímos os valores das posições relativas nas equações, chegando a:

$$\min Z = \sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} + \sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} + \sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2}$$

Sujeito a:

$$\sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2} \leq 300$$

Parabéns!

Você acaba de construir o modelo matemático que determinará a melhor localidade para a construção da nova unidade.

Avançando na prática

Minimização de custo de transporte.

Descrição da situação-problema

A empresa estuda como minimizar o custo de transporte entre suas duas unidades e três grandes clientes. Os custos unitários de transporte, bem como as demandas e capacidades produtivas são demonstradas no Quadro 2.12. O transporte é feito por transportadores terceirizados e a transportadora oferece um desconto sobre o preço unitário em função da quantidade transportada de 0,001 por unidade (LACHTERMACHER, 2002, p. 315).

Quadro 2.12 | Custo unitário de transporte, Capacidade e Demandas

Unidades	Clientes			Capacidade (un.)
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	
Sede	R\$ 20,00	R\$ 25,00	R\$ 30,00	600
Nova unidade	R\$ 25,00	R\$ 20,00	R\$ 30,00	900
Demanda (unid)	550	400	300	

Fonte: adaptado de Lachtermacher (2002, p. 315).

Você deve construir o modelo do problema.

Resolução da situação-problema

Inicialmente, vamos identificar as variáveis de decisão do problema:

Quantidade transportada de i para j - x_{ij}

A sede será $i = 1$ e a Nova unidade $i = 2$

O cliente 1, $j = 1$; o cliente 2, $j = 2$; e o cliente 3, $j = 3$

A função objetivo será minimizar o valor do custo de transporte menos o desconto concedido $(C_{ij} - 0,001x_{ij})$ multiplicado pela quantidade transportada de i para j (x_{ij}).

As restrições devem considerar as demandas de cada cliente e a capacidade de cada unidade.

O modelo ficará:

$$\min \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (C_{ij} - 0,001x_{ij})x_{ij}$$

s.a.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 600$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 900$$

$$x_{11} + x_{21} = 550$$

$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 300$$

Parabéns!

Mais um desafio vencido.

Faça valer a pena

1. Os problemas de Programação Linear podem ser resolvidos através do algoritmo SIMPLEX. Nos problemas de Programação Linear todas as funções são lineares (tanto a função objetivo como as restrições do problema em estudo), o que não acontece com os problemas de Programação Não Lineares que apresentam pelo menos uma função não linear nas restrições, ou mesmo a função objetivo.

Analise os modelos matemáticos abaixo e identifique aquele que representa um problema de Programação Não Linear.

$$\max z = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4$$

sujeito :

a) $x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 12$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 6$$

$$\max z = 240x_1 - 24x_1^2 + 240x_2 - 24x_2^2$$

sujeito :

b) $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min z = 6x_1 + 10x_2$$

sujeito :

c) $-x_1 + x_2 \leq 2$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = x + 3y$$

sujeito :

d) $3x - 2y \geq 10$

$$2x + 3y = 34$$

$$4x + 12y \leq 104$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$\max z = 4x + 5y + 4z$$

sujeito :

e) $x + y \leq 4$

$$y + 2z \leq 5$$

$$2x + 2y + 4z \leq 15$$

$$\{x, y, z\} \in \mathbb{Z}^+$$

2. João Carlos tem R\$ 180.000,00 disponíveis para investir em 5 projetos. O valor presente líquido (VPL) que pode ser obtido de cada projeto (x mil reais) se x_i mil reais forem investidos no projeto i é dado Quadro 2.13. A fim de minimizar o risco, no máximo R\$ 60.000,00 podem ser investido em cada projeto. João Carlos quer determinar quanto aplicar em cada projeto, de modo a maximizar o valor presente líquido.

Quadro 2.13 | VPL obtido de cada projeto

Projeto	VPL
1	$3x_1^2 - 120x_1$
2	$2x_2^3 - 160x_2$
3	$6x_3^2 - 130x_3$
4	$4x_4^3 - 170x_4$
5	$2x_5^3 - 150x_5$

Fonte: Fávoro e Belfiore (2013, p. 460).

Qual alternativa modela o problema de Programação Não Linear?

$$\min z = -3x_1^2 - 120x_1 - 2x_2^3 - 160x_2 - 6x_3^2 - 130x_3 - 4x_4^3 - 170x_4 + 2x_5^3 - 150x_5$$

s.a.

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\max z = 3x_1^2 + 120x_1 + 2x_2^3 + 160x_2 + 6x_3^2 + 130x_3 + 4x_4^3 + 170x_4 + 2x_5^3 + 150x_5$$

s.a.

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\min z = 3x_1^2 - 120x_1 + 2x_2^3 - 160x_2 + 6x_3^2 - 130x_3 + 4x_4^3 - 170x_4 + 2x_5^3 - 150x_5$$

s.a.

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\max z = 3x_1^2 - 120x_1 + 2x_2^3 - 160x_2 + 6x_3^2 - 130x_3 + 4x_4^3 - 170x_4 + 2x_5^3 - 150x_5$$

s.a.

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\max z = -3x_1^2 - 120x_1 - 2x_2^3 - 160x_2 - 6x_3^2 - 130x_3 - 4x_4^3 - 170x_4 - 2x_5^3 - 150x_5$$

s.a.

e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

3. Os problemas de Programação Não Linear Irrestrita podem ser divididos em uma única variável e múltiplas variáveis. Os problemas de PNL com restrições buscam otimizar uma função que pode ser uma função linear ou não linear com múltiplas variáveis.

Sobre os problemas de PNL é correto afirmar que:

- a) Em um problema de PNL, todas as funções devem ser não lineares.
- b) Em problemas de PNL com somente duas variáveis, é possível fazer a representação gráfica do problema e a solução ótima sempre estará em um dos pontos extremos.
- c) Somente funções não lineares devem ser consideradas na modelagem das restrições.
- d) As condições de Karush-Kuhn-Trucker servem para avaliar as condições de viabilidade do modelo do problema de PNL.
- e) As condições de Karush-Kuhn-Trucker (KKT) podem ser aplicadas para verificar se uma determinada solução é ou não uma solução ótima local.

Seção 2.3

Tipos de programação não linear

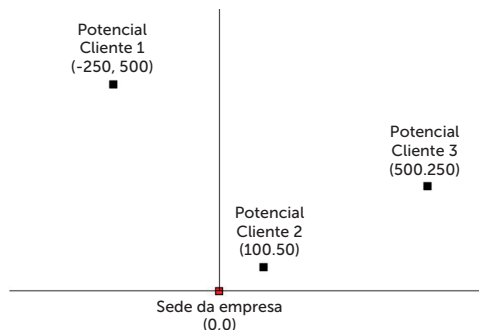
Diálogo aberto

Na seção anterior compreendemos que os modelos dos problemas de Programação Não Linear têm como característica a presença de funções não lineares. E essas funções podem estar presentes tanto na sua função objetivo quanto nas restrições dos problemas. Devido a essa característica, cada tipo de problema de Programação Não Linear deve ser modelado de maneira única; não é possível utilizar um algoritmo para resolver todos os tipos de problemas como o SIMPLEX nos problemas de Programação Linear.

Durante esta seção finalizaremos o estudo de Programação Não Linear estudando as Programações Quadráticas, Côncavas e Convexas; e também a modelar os problemas em Excel.

Para enxergarmos melhor o cenário, vamos retomar o exemplo da empresa que deseja aumentar sua participação no mercado e para isso decidiu construir uma nova unidade para poder atender três potenciais clientes. A empresa pediu que você construísse um modelo matemático com objetivo de localizar a melhor posição dessa unidade de forma que a distância fosse a mínima até os potenciais clientes, conforme visto a seguir na reprodução da Figura 2.9, e atendendo a restrição de que a distância máxima seja de 300 km.

Reprodução da Figura 2.9 | localização dos potenciais clientes em relação a sede da empresa em km



Fonte: adaptada de Lachtermacher (2002, p. 311).

O modelo matemático final ficou conforme abaixo:

$$\text{Min} Z = \sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} + \sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} + \sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2}$$

sujeito a:

$$\sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2} \leq 300$$

O seu desafio agora é calcular a posição da nova unidade (X, Y) utilizando o Excel como ferramenta para se chegar à solução ótima do problema.

Examine novamente o modelo, use seu conhecimento do suplemento SOLVER do Excel e resolva mais esse desafio.

Vamos em frente e bons estudos!

Não pode faltar

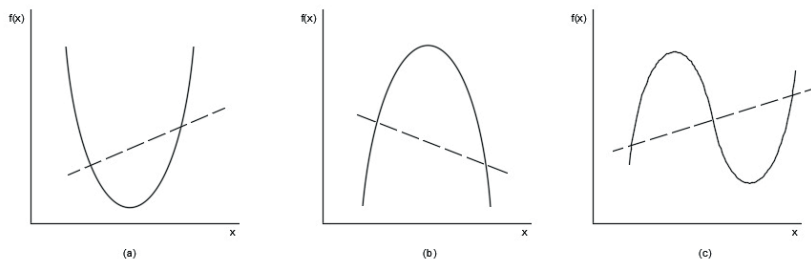
Estudaremos nesta seção os problemas de Programação Convexa, Côncava e Quadrática. Mas antes vamos relembrar o que são funções côncavas e convexas.

Em um conjunto convexo S , uma função é dita convexa se $\forall x_1 \in S$ e $\forall x_2 \in S$ obedecem à condição $f(cx_1 + (1-c)x_2) \leq cf(x_1) + (1-c)f(x_2)$, onde $0 \leq c \leq 1$.

A função é dita côncava quando num conjunto convexo S , $\forall x_1 \in S$ e $\forall x_2 \in S$ obedece à condição $f(cx_1 + (1-c)x_2) \geq cf(x_1) + (1-c)f(x_2)$, onde $0 \leq c \leq 1$. Observe que uma função $f(x)$ é côncava se $-f(x)$ é convexa.

Graficamente, se uma reta cruzar o gráfico em dois pontos e o ponto de inflexão (o ponto onde a curva muda de sentido) ficar abaixo dessa reta, a função é dita convexa. Se o ponto de inflexão ficar acima da reta, ela é côncava. Caso uma reta cruze a função em mais de dois pontos da curva, a função não é convexa, nem côncava. A Figura 2.13 ilustra as funções (a) convexa; (b) côncava; e (c) nem convexa nem côncava.

Figura 2.13 | gráficos representando (a) função convexa; (b) côncava; (c) nem convexa nem côncava



Fonte: adaptada de Fávero e Belfiore (2013).



Pesquise mais

No vídeo *Funcoes Convexas, Concavas, Estritamente Convexas e Estritamente Concavas*, a professora Liana Mendes Feitosa Soares explica os conceitos e fundamentos das funções côncavas, convexas, estritamente côncavas e estritamente convexas de forma simples e de fácil assimilação. Muito útil para fixar o entendimento desses tipos de funções. Duração: 11 min 53 seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=fZDIYZWrCWs>>. Acesso em: 19 ago. 2018.

É possível determinar se uma função (com somente uma variável) é convexa ou côncava em um conjunto convexo S , por meio do cálculo da sua segunda derivada representada como: $f''(x)$ ou como $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Se $\frac{d^2f(x)}{dx^2} \geq 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função convexa no conjunto S .

Se $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função estritamente convexa no conjunto S .

Se $\frac{d^2f(x)}{dx^2} \leq 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função côncava no conjunto S .

Se $\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$ para $\forall x \in S$, $f(x)$ é uma função estritamente côncava no conjunto S .



Exemplificando

Dada a função $f(\mathbf{x}) = 10x^2 + 16$ determine o tipo de função (convexa, côncava ou nem convexa nem côncava).

Para conhecer o tipo de função, é preciso calcular a segunda derivada da função.

A primeira derivada tem como resultado: $f'(\mathbf{x}) = 20x$ e a segunda derivada é igual a: $f''(\mathbf{x}) = 20$.

$f''(\mathbf{x}) = 20 > 0$, portanto, a função é estritamente convexa.

Em se tratando de uma função com duas variáveis, o tratamento é semelhante às funções com somente uma variável. Porém, é preciso calcular a derivada parcial de segunda ordem para determinar a convexidade da função de um conjunto convexo S .

É preciso montar uma matriz quadrada (2×2) com as derivadas parciais de segunda ordem da função denominada matriz Hessiana H .

$$H[f(x_1, x_2)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

E a determinante da matriz Hessiana é dada por D

$$D = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2$$

Cabe recordar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ é igual a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

Se $D \geq 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \geq 0$ para todos os valores possíveis de x_1 e x_2 , a função é convexa.

Se $D > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} > 0$ para todos os valores possíveis de x_1 e x_2 , a função é estritamente convexa.

Se $D \geq 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \leq 0$ para todos os valores possíveis de x_1 e x_2 , a função é côncava.

Se $D > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$ para todos os valores possíveis de x_1 e x_2 , a função é estritamente côncava.



Exemplificando

Dada a função $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 2$ determine se ela é côncava ou convexa (LACHTERMACHER, 2002, p. 293).

Calculando as derivadas parciais de primeira ordem, temos:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 3$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1$$

E as derivadas parciais de segunda ordem, temos:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$$

A matriz Hessiana

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

Como $D > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} > 0$ para todos os valores possíveis de x_1 e x_2 , a função é estritamente convexa.

Para funções com três ou mais variáveis, o procedimento é o mesmo visto para funções com duas variáveis. Deve-se calcular as derivadas parciais de segunda ordem e montar a matriz Hessiana da função que se deseja analisar.

Seja uma função com n variáveis, a matriz Hessiana será uma matriz simétrica de ordem n ($n \times n$) e formada por todas as derivadas parciais de segunda ordem dessa função.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_3} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Após montar a matriz Hessiana, passamos a calcular os valores dos determinantes:

$$D_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Para definirmos o tipo de função com múltiplas variáveis, utilizaremos o Quadro 2.14. Devemos prestar atenção que as funções côncavas e estritamente côncavas os sinais das inequações alteram-se nos cálculos das determinantes.

Quadro 2.14 | Classificação do tipo de função com múltiplas variáveis a partir dos cálculos dos determinantes

Classificação	D_1	D_2	D_3	...	D_n
Convexa	≥ 0	≥ 0	≥ 0	...	≥ 0
Estritamente convexa	> 0	> 0	> 0	...	> 0
Côncava	≤ 0	≥ 0	≤ 0	...	...
Estritamente côncava	< 0	> 0	< 0	...	...

Fonte: adaptado de Fávero e Belfiore (2013).



Assimile

Pontos máximos e mínimos são os pontos ótimos de funções. Nas funções não lineares são os pontos de inflexões, ou seja, o ponto no qual a função muda sua direção.

Algumas funções não lineares podem apresentar várias mudanças de direções como nas funções polinomiais, nestes casos os pontos máximos e mínimos podem ser classificados em locais ou globais. O máximo (ou mínimo) global é aquele ponto em que não existe nenhum outro acima (no máximo) ou abaixo (mínimo) dele.

Visto as funções convexa, côncava, iremos estudar as programações côncava, convexa e quadrática.

Programação côncava

Problemas de Programação Não Linear buscam otimizar a função objetivo e por definição a PNL possui, ao menos, uma função não linear seja na própria função objetivo, ou nas funções que fazem parte das restrições do problema.

Dado um modelo matemático genérico de PNL

$$\max z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_1 \\g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_2 \\ \dots \\g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_m \\x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0\end{aligned}$$

Será um modelo de Programação Côncava se atender às seguintes condições:

- Se for um problema de maximização.
- Se as restrições do tipo $g_i(x) \leq b_i$ e $g_i(x)$ for uma função convexa.
- Se as restrições do tipo $g_i(x) \geq b_i$ e $g_i(x)$ for uma função côncava.
- Se cada restrição do tipo $g_i(x)$ com sinal de igualdade for uma função linear.

Se todas as condições são obedecidas, o PNL é dito de Programação Côncava e o mínimo encontrado é o global.

Cabe um esclarecimento: $g_i(x) \leq b_i$ e $g_i(x) \geq b_i$ dizem respeito às restrições do modelo, e podem existir como restrições tanto funções côncavas como convexas. Quando as restrições obedecerem às condições acima a Programação será do tipo Côncava. Essa observação cabe também para a Programação Convexa.

Programação convexa

De maneira semelhante, um modelo será de Programação Convexa se atender as seguintes condições:

- Se for um problema de minimização.
- Se as restrições do tipo $g_i(x) \leq b_i$ e $g_i(x)$ for uma função convexa.
- Se as restrições do tipo $g_i(x) \geq b_i$ e $g_i(x)$ for uma função côncava.
- Se cada restrição do tipo $g_i(x)$ com sinal de igualdade for uma função linear.

De forma semelhante à Programação Côncava, se todas as condições são atendidas o PNL é dito Programação Convexa e o máximo encontrado é o global.

Programação quadrática

Um problema de programação é do tipo quadrática quando sua função objetivo é uma função quadrática e todas as restrições são funções lineares.

Uma função quadrática com n variáveis pode ser descrita como a soma de todos os termos que incluem: termos com uma variável ao quadrado (x_i^2); termos com o produto de duas variáveis distintas ($x_i \cdot x_j$); termos das funções lineares ($n \cdot x_i$); termo da constante (D).

A formulação final da função objetivo é expressa como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n C_i x_i + D$$

Em problemas de Programação Quadrática, uma vez que todas as restrições são funções lineares, é possível concluir que o conjunto de soluções possíveis será sempre convexo (FÁVERO; BELFIORE, 2013).

Programação não linear no Excel

Comentamos que problemas de Programação Não Linear são mais difíceis de serem solucionados por suas características, uma delas é a de não se conseguir modelar todos os problemas da mesma forma, impedindo que os problemas possam ser solucionados por um algoritmo como o SIMPLEX usado nos problemas de Programação Linear.

Uma ferramenta útil para facilitar a solução dos problemas de PNL são as planilhas eletrônicas, em especial o Excel pela sua vasta popularização. O suplemento SOLVER permite realizar os cálculos das funções não lineares rapidamente requerendo, entretanto, atenção na construção do modelo matemático na planilha.

Um exemplo clássico de programação Não Linear é o caso da determinação do lote econômico de compra (LEC) que para seu cálculo deve considerar os custos unitários de manutenção e de pedido, da demanda anual do produto, o tamanho do lote, além do preço unitário de compra do produto/peça.

A função objetivo do LEC é dada por: $\min z = \frac{Q}{2} C_m + \frac{D}{Q} C_p + D \cdot P$

Onde:

- Q é o tamanho do lote
- D é a demanda anual do produto
- P é o preço de compra unitário
- C_m é o custo unitário anual de manutenção no estoque
- C_p é o custo unitário de pedido

Vamos admitir que o custo unitário P de uma peça seja R\$ 25,00. A manutenção da peça em estoque gera um custo (C_m) anual unitário de R\$ 12,00. O custo unitário de pedido (C_p) é de R\$ 5,00. A peça é utilizada para produzir um produto que tem demanda anual de 2000 unidades. Qual é o tamanho do LEC?

O modelo do problema na planilha Excel pode ser visto na Figura 2.14.

Figura 2.14 | modelo do problema de LEC

	A	B	C
1	Demanda anual (D)	2000	
2	Preço Unitário (P)	R\$ 25,00	
3	Custo do Pedido (C_p)	R\$ 5,00	
4	Custo de Manutenção (C_m)	R\$ 12,00	
5	Tamanho do lote (Q)	1	
6			
7	Custo Total Anual	R\$ 60.006,00	
8			
9			

Fonte: elaborada pelo autor.

A função objetivo é dada na célula B7 e sua equação é:

$$=(B5/2*B4)+(B1/B5*B3)+(B1*B2)$$

A única restrição é que o tamanho do lote (Q) deve ser maior que 1.

O preenchimento dos parâmetros do SOLVER pode ser observado na Figura 2.15.

Figura 2.15 | preenchimento dos parâmetros do SOLVER

Parâmetros do Solver X

Definir Objetivo: ↑

Para: ☐ Máx. ☒ Mín. ☐ Valor de:

Alterando Células Variáveis: ↑

Sujeito às Restrições:

Adicionar
Alterar
Excluir
Redefinir Tudo
Carregar/Salvar

☒ Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução: Opções

Método de Solução
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolver Fechar

Fonte: elaborada pelo autor.

A solução do problema do cálculo do LEC é apresentada na Figura 2.16.

Figura 2.16 | solução encontrada pelo SOLVER para o problema de LEC

	A	B	C
1	Demanda anual (D)	2000	
2	Preço Unitário (P)	R\$ 25,00	
3	Custo do Pedido (C_p)	R\$ 5,00	
4	Custo de Manutenção (C_m)	R\$ 12,00	
5	Tamanho do lote (Q)	40,82482906	
6			
7	Custo Total Anual	R\$ 50.489,90	
8			

Fonte: elaborada pelo autor.

O tamanho do LEC é de 41 peças e o custo mínimo calculado é de R\$ 50.489,90.



Reflita

Como podemos saber se o valor encontrado como solução do problema é o mínimo global ou o mínimo local?

Sem medo de errar

A localização da nova unidade foi inicialmente apresentada conforme o modelo matemático construído conforme o objetivo e a restrição imposta pela diretoria da empresa.

$$MinZ = \sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} + \sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} + \sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2}$$

sujeito a:

$$\sqrt{(-250 - X)^2 + (500 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(100 - X)^2 + (50 - Y)^2} \leq 300$$

$$\sqrt{(500 - X)^2 + (250 - Y)^2} \leq 300$$

Agora, devemos calcular a posição exata (X,Y) da nova unidade com o auxílio do Excel.

Devemos começar construindo o modelo no Excel, conforme a Figura 2.17.

Figura 2.17 | Construção do modelo matemático no Excel

	A	B	C	D	E
1	Potenciais	Localização (km)		Distância	Limite
2	Clientes	X	Y	(km)	(km)
3	1	-250	500	559,017	300
4	2	100	50	111,8034	300
5	3	500	250	559,017	300
6					
7	Localização da	0	0		
8	Unidade (km)				
9	Distância Total da Unidade (km)	1229,84			

Fonte: adaptada de Lachtermacher (2002).

As células D3, D4 e D5 são preenchidas com as funções não lineares conforme o Quadro 2.15 apresentado a seguir:

Quadro 2.15 | preenchimento das células com funções não lineares

D3	=RAIZ(((B3-\$B\$7)^2)+((C3-\$C\$7)^2))
D4	=RAIZ(((B4-\$B\$7)^2)+((C4-\$C\$7)^2))
D5	=RAIZ(((B5-\$B\$7)^2)+((C5-\$C\$7)^2))

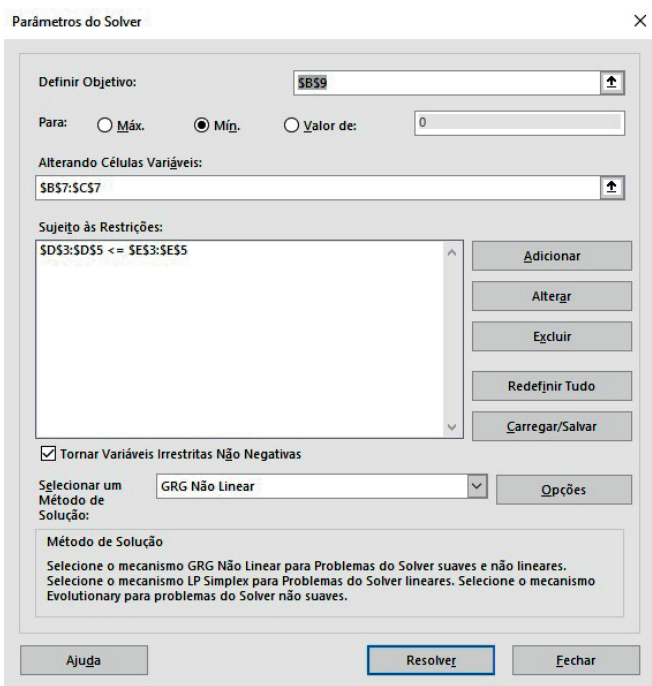
Fonte: elaborado pelo autor.

A função objetivo é de minimizar as distâncias entre a nova unidade e os três potenciais clientes. A função objetivo (célula B9) pode ser expressa:

$$= RAIZ((B3 - B7)^2 + (C3 - C7)^2) + RAIZ((B4 - B7)^2 + (C4 - C7)^2) + RAIZ((B5 - B7)^2 + (C5 - C7)^2)$$

Os parâmetros do SOLVER são preenchidos conforme a Figura 2.18.

Figura 2.18 | preenchimento dos parâmetros do SOLVER



Fonte: elaborado pelo autor.

A solução do problema de localização da nova unidade é ilustrada na Figura 2.19.

Figura 2.19 | Solução do problema de localização da nova unidade

	A	B	C	D	E
1	Potenciais Clientes	Localização (km)		Distância (km)	Limite (km)
2		X	Y		
3	1	-250	500	491,318	300
4	2	100	50	299,9999	300
5	3	500	250	299,9999	300
6					
7	Localização da Unidade (km)	210,557	328,885		
8					
9	Distância Total da Unidade (km)	1091,32			

Fonte: elaborado pelo autor.

Interpretando o resultado chegamos à conclusão de que a nova unidade deverá estar localizada segundo as coordenadas ($X = 210,557$; $Y = 328,885$) km segundo a posição atual da sede. Em linha reta, a distância será de **1091,32** km.

Avançando na prática

Minimização de custo de transporte

Descrição da situação-problema

A empresa estuda como minimizar o custo de transporte entre suas duas unidades e três grandes clientes. Os custos unitários de transporte, bem como as demandas e capacidades produtivas são demonstradas no Quadro 2.12, reproduzido a seguir, o transporte é feito por transportadores terceirizados e a transportadora oferece um desconto sobre o preço unitário em função da quantidade transportada de 0,001 por unidade transportada.

Unidades	Clientes			Capacidade (unid)
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	
Sede	R\$ 20,00	R\$ 25,00	R\$ 30,00	600
Nova unidade	R\$ 25,00	R\$ 20,00	R\$ 30,00	900
Demanda (unid)	550	400	300	

Fonte: adaptado de Lachtermacher (2002, p. 315).

O modelo matemático do problema foi construído:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (C_{ij} - 0,001x_{ij})x_{ij}$$

s.a.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 900$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$$

$$x_{11} + x_{21} = 550$$

$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 300$$

Você deverá calcular o menor custo de transporte com o auxílio do Excel.

Resolução da situação-problema

O modelo no Excel pode ser visto na Figura 2.20

Figura 2.20 | Construção do modelo matemático no Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Custo de Transporte					
2	De	Para				
3		Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3		
4	Sede	R\$ 20,00	R\$ 25,00	R\$ 30,00		
5	Nova Unidade	R\$ 25,00	R\$ 20,00	R\$ 30,00		
6						
7	Quantidade transportada					
8	De	Para				
9		Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Quantidade Enviada	Capacidade
10	Sede	1	1	1	3	900
11	Nova Unidade	1	1	1	3	600
12	Quantidade Recebida	2	2	2		
13	Demanda	550	400	300		
14						
15	Custo Total	149,994				

Fonte: adaptada de Lachtermacher (2002).

O preenchimento das células referentes às restrições pode ser acompanhado pelo Quadro 2.16

Quadro 2.16 | Preenchimento das células de restrições

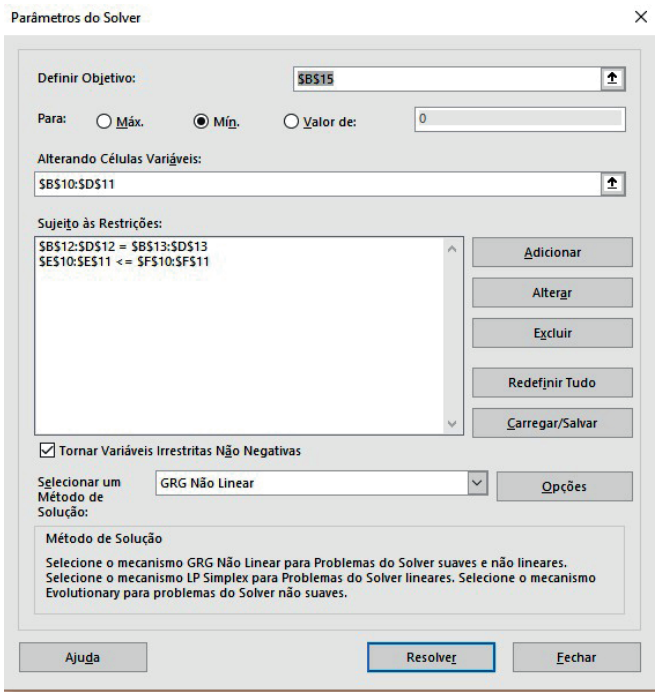
E10	=B10+C10+D10
E11	=B11+C11+D11
B12	=B10+B11
C12	=C10+C11
D12	=D10+D11

Fonte: elaborado pelo autor.

A função objetivo está na célula B15 e sua formulação é:
= SOMAPRODUTO(B4 : D5;B10 : D11) – 0,001*((B10 ^2) +
(C10 ^2)+(D10 ^2)+(B11^2)+(C11^2)+(D11^2))

Os parâmetros do SOLVER são preenchidos conforme o mostrado na Figura 2.21

Figura 2.21 | Preenchimento dos parâmetros do SOLVER



Fonte: elaborado pelo autor.

O resultado calculado pelo SOLVER é mostrado na Figura 2.22.

Figura 2.22 | Solução do problema de custo de transporte calculado pelo SOLVER

	A	B	C	D	E	F
1	Custo de Transporte					
2	De	Para				
3		Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3		
4	Sede	R\$ 20,00	R\$ 25,00	R\$ 30,00		
5	Nova Unidade	R\$ 25,00	R\$ 20,00	R\$ 30,00		
6						
7	Quantidade transportada					
8	De	Para				
9		Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Quantidade Enviada	Capacidade
10	Sede	550	0	100	650	900
11	Nova Unidade	0	400	200	600	600
12	Quantidade Recebida	550	400	300		
13	Demanda	550	400	300		
14						
15	Custo Total	R\$ 27.487,50				

Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Problemas de Programação Não Linear possuem aplicações nas mais variadas áreas de atuação, desde o controle de engorda de gado de corte até a formação de carteira de investimento, em ambos os exemplos o objetivo é maximizar o ganho seja pela venda da carne, seja pelo retorno de cada investimento da carteira.

Uma característica dos problemas de PNL é:

- A função objetivo e todas as restrições são funções lineares.
- A função objetivo e todas as restrições são funções inteiras.
- A função objetivo e todas as restrições são funções binárias.
- Deve haver uma função não linear, seja na função objetivo ou nas restrições.
- Sempre deve haver função quadrática.

2. Dada uma função não linear, a forma para se descobrir se essa função corresponde a uma função convexa, côncava ou nem convexa nem côncava é através do cálculo da segunda derivada (quando se tratar de uma função não linear com somente uma variável) da função.

A função $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x$ corresponde a qual tipo de função?

- a) Convexa
- b) Côncava
- c) Nem convexa nem côncava
- d) Linear
- e) Quadrática

3. Dada uma função não linear, a forma para se descobrir se essa função corresponde a uma função convexa, côncava ou nem convexa nem côncava é através do cálculo da segunda derivada (quando se tratar de uma função não linear com somente uma variável) da função.

Qual das alternativas abaixo é uma função convexa?

- a) $f(x) = x^3 - 2x + 20$
- b) $f(x) = e^x$
- c) $f(x) = 4x + 10$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}$
- e) $f(x) = \ln(x)$

Referências

COLIN, E. C. **Pesquisa Operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas – Rio de Janeiro: LTC, 2007.

FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. **Pesquisa Operacional para cursos de engenharia** – Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013. [recurso eletrônico]

LANCHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

VICECONTI, P. E. V. **Introdução à economia**. 12. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

Markov, filas e simulação de Monte Carlo

Convite ao estudo

Nesta nova unidade será apresentado, na seção inicial, as cadeias de Markov. Estudaremos seus conceitos, fundamentos e aplicações. Na seção seguinte o tema será a teoria das filas quando aprenderemos a compreender o comportamento das filas, por que se formam, como calcular o tempo médio que uma pessoa fica no sistema aguardando o atendimento e outras particularidades desse cenário que faz parte da realidade de todas as pessoas. Enfim na seção final, estudaremos o método Monte Carlo de simulação.

Cadeias de Markov são processos estocásticos com propriedade markoviana, ou seja, que apresenta “falta de memória” durante a evolução de seus estados. Falta de memória significa que o que ocorreu antes não interfere com o estado futuro, somente o estado atual e o imediatamente anterior ditará o que poderá ocorrer no estado futuro.

Esse conceito da “falta de memória” servirá como base quando estudarmos a seção seguinte, a teoria das filas. Além da propriedade markoviana, a teoria das filas tem conceitos e fundamentos que se bem compreendidos e aplicados diminuem os efeitos do acúmulo de entidades (pessoas ou qualquer outro material que necessite de atendimento) em algum sistema.

Na última seção aprenderemos a utilidade do método de Monte Carlo de simulação que através da geração de números aleatórios pode auxiliar no estudo do comportamento de sistemas.

Como forma de facilitar a compreensão dos conteúdos, vamos utilizar o seguinte cenário: uma empresa do ramo metal-mecânico deseja lançar um novo produto desenvolvido

por ela, portanto, há a necessidade de planejar a capacidade produtiva e necessidade de matérias-primas de forma a atender a demanda. Entretanto, não existe perspectiva de demanda do produto até o presente momento. Iremos durante a unidade ajudar a empresa a prever a demanda por seus produtos e analisar a linha de produção do novo produto para verificar a existência de gargalos na linha de processamento.

Para alcançarmos os resultados de aprendizagem, durante as seções desta unidade, estudaremos os conceitos e fundamentos das cadeias de Markov e suas aplicações; entenderemos a teoria das filas, seu funcionamento e comportamento, bem como analisar como melhorar o desempenho do sistema, dimensionando corretamente os postos de atendimentos. Aprenderemos a utilizar o método de Monte Carlo de simulação em sistemas de filas e outras aplicações que exigem a simulação através do auxílio de geração de números aleatórios.

Ao final desta unidade você estará apto a aplicar os fundamentos das cadeias de Markov, da teoria das filas e do método de Monte Carlo de maneira consciente através de raciocínio crítico.

Seção 3.1

Cadeias de Markov - simulação

Diálogo aberto

Cadeias de Markov são processos estocásticos com propriedade markoviana em um espaço de estados discretos. Como propriedade markoviana entendemos os processos que não dependem do que ocorreu tempos atrás para chegar ao estado futuro, mas somente ao seu atual estado e o imediatamente anterior.

A previsão de demanda pode ser compreendida como uma cadeia de Markov, pois sua demanda futura independe da demanda histórica, mas somente ao estado atual.

Por não possuir informações referente ao novo produto, a diretoria entende que poderá utilizar algumas informações de produtos muito similares ao novo para começarem a compreender o comportamento do mercado e prever a demanda desse novo produto.

Os estudos realizados a pedido da diretoria indicam que o primeiro mês tem 35% de chance de ter uma demanda de até 3000 unidades (considerado pela diretoria como sendo de alta demanda) e 65% de ter uma demanda de até 1000 unidades (baixa demanda). O estudo também indicou que caso a demanda seja alta, a imediatamente posterior tem probabilidade de 75% de ser alta e 25% de ser baixa, mas se a demanda for baixa, a imediatamente posterior terá 50% de ser alta e 50% de ser baixa.

O desafio no cenário descrito é de prever a demanda do produto mais provável, e para isso você deverá utilizar o modelo da cadeia de Markov para construir a matriz de probabilidade de transição e simular a demanda mais provável dos três primeiros meses.

Estude atentamente os conceitos sobre cadeias de Markov e vença mais esse desafio.

Bons estudos e bom trabalho!

Não pode faltar

Antes de nos aprofundar sobre a cadeia de Markov é necessário fazer uma pequena introdução sobre processos estocásticos.

A construção de modelos de fenômenos reais supõe uma série de simplificações, pois o sistema real é muito mais rico e complexo que toda a ciência e tecnologia desenvolvida até o presente momento. Quando a modelagem analítica é estocástica inúmeras dependências precisam ser consideradas, tornando os cálculos de probabilidade muito mais difíceis e alguns casos impossíveis (CAMPOS, 2017). Portanto, quanto mais independentes se assume o modelo probabilístico maior a chance de realizar cálculos diretamente, o que implica qualidade do modelo construído. O desafio é relacionar dependências de forma que o modelo represente o sistema real da melhor maneira possível, mas que seja matematicamente possível sua resolução.

Um conjunto indexado de variáveis aleatórias $\{X_t, t \in T\}$ é chamado de processo estocástico.

“Sendo $t \in T$, o conjunto de todos os valores que X_t pode assumir é chamado de espaço de estados, e cada um desses valores é chamado de estado do processo” (CAMPOS, 2017). T é o conjunto de índices conhecido como espaço dos parâmetros.

Os processos estocásticos podem ser classificados considerando o espaço de estados e o espaço de parâmetros (CAMPOS, 2017):

- Espaço de estado discreto: se for fixado $t \in T$ a variável X_t assume um número finito ou enumerável de valores.
- Espaço de estado contínuo: se for fixado $t \in T$, a variável X_t assume valores em um conjunto não enumerável.
- Espaço de parâmetros discretos: $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- Espaço de parâmetros contínuos: $T = \{t : -\infty < t < +\infty\}$ ou $T = \{t : \geq 0\}$

Processo de Markov

Processo de Markov é um processo estocástico que apresenta a propriedade markoviana.

A propriedade markoviana diz que o futuro do processo depende somente do estado presente e do estado imediatamente anterior, mas não de todo seu histórico (MOREIRA, 2010; CAMPOS, 2017). Processo de Markov são ditos, portanto, processos “sem memória”.

Logo, um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ é um processo de Markov se qualquer conjunto $t_1 < t_2 < \dots t_{n+1}$ no espaço de parâmetros T e $\{x_1, x_2, \dots x_{n+1}\}$ no espaço de estados, temos:

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n).$$

A equação acima que define a propriedade markoviana mostra que a probabilidade condicional de um evento passar de um estado x_n para x_{n+1} é a mesma, não importando qual a sequência $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ de estados precedeu o estado atual x_n .

Os processos estocásticos foram classificados anteriormente segundo seus espaços de estados e espaços de parâmetros e como o processo de Markov é um processo estocástico podemos classificá-los segundo a combinação de seus espaços de estados e estados de parâmetros.

- **Cadeia de Markov com tempo discreto:** Espaço de parâmetros: discreto. Espaço de estados: discreto.
- **Processo de Markov com tempo discreto:** Espaço de parâmetros: discreto. Espaço de estados: contínuo.
- **Cadeia de Markov com tempo contínuo:** Espaço de parâmetros: contínuo. Espaço de estados: discreto.
- **Processo de Markov com tempo contínuo:** Espaço de parâmetros: contínuo. Espaço de estados: contínuo.

O Quadro 3.1 ilustra a classificação considerando a relação entre os espaços de parâmetros e espaços de estados.

Quadro 3.1 | Classificação dos processos de Markov considerando os espaços de parâmetros e espaços de estados

Espaço de Parâmetros	Espaços de Estados	
	Discreto	Contínuo
Discreto	Cadeias de Markov com tempo discreto	Processos de Markov com tempo discreto
Contínuo	Cadeias de Markov com tempo contínuo	Processos de Markov com tempo contínuo

Fonte: elaborado pelo autor.

As cadeias de Markov, por se tratarem de processos “sem memória”, podem ser observadas por uma série de situações no cotidiano das pessoas e das empresas. Por exemplo, o processo de chegada de clientes em uma loja, pois o número de pessoas que chegam à loja independe do número de clientes que chegaram anteriormente à loja; ou número de peça em estoque que não depende do estoque de dias passados, somente do dia imediatamente anterior. Em ambas as situações existe a aleatoriedade nos eventos, mas é possível simular os estados futuros para calcular o número de pessoas necessárias para o atendimento aumentando a satisfação dos clientes; ou simulando as demandas futuras para dimensionar o estoque de forma a não faltar produtos.



Refleta

A distribuição de Poisson é muito útil em aplicações práticas, ela é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento. Seria a distribuição de Poisson um processo estocástico?

Cadeias de Markov discretas

Em projetos de simulação é importante conhecer com que frequência os eventos ocorrem, em intervalos de tempos ou de forma contínua. Os eventos que ocorrem segundo um intervalo de tempo são denominados de discretos.

Para ilustrar a cadeia de Markov discreta na simulação, vamos imaginar um executivo que possua dois carros, um azul (**A**) e outro preto (**P**), e gostaríamos de simular que carro que ele usará no dia seguinte, ou no quinto dia depois de hoje.

Dentro de cada carro ele deixa uma moeda. O executivo escolhe com qual irá trabalhar no dia seguinte jogando a moeda para cima. Se der cara ele troca de carro e vai para o trabalho com o de outra cor, mas se der coroa ele vai com o mesmo carro. As moedas nunca saem de seus respectivos carros.

Vamos assumir que $X = \{\text{azul}, \text{preto}\}$ e $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ como sendo a sequência dos carros usados na segunda, terça, quarta, etc.

Imaginemos, agora, que as moedas que ficam dentro dos carros não sejam moedas “honestas”, ou seja, a probabilidade de dar cara ou coroa não é de 50% para cada face, e que a moeda que está no carro azul tem probabilidade p de sair cara, enquanto a moeda que está no carro preto tem probabilidade q de cara.

As probabilidades p e q são conhecidas como probabilidades de transição, ou seja, probabilidades associadas à transição de um estado para outro (MOREIRA, 2010, p. 334) e são probabilidades condicionadas, pelo qual podemos escrever:

$$\begin{aligned}P(A/P) &= p \\P(A/A) &= 1-p \\P(P/A) &= q \\P(P/P) &= 1-q\end{aligned}$$



Pesquise mais

No artigo *Simulação e efeito de veranico em culturas desenvolvidas na região de Palmeira D'Oeste, estado de São Paulo* os autores determinaram as probabilidades de ocorrência de veranicos de diferentes durações através da simulação. Disponível em: <http://www.irrigaterra.com.br/pdf/REA_veranico.PDF>. Acesso em: 17 set. 2018.

As regras do executivo para escolher o carro podem ser exibidas na forma de uma matriz quadrada chamada de Matriz de Probabilidades de Transição.

$$P = \begin{pmatrix} P(A/A) & P(A/P) \\ P(P/A) & P(P/P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Portanto, $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma cadeia de Markov com Matriz de Transição P .

Vamos imaginar que o executivo tenha usado o carro azul na segunda-feira e jogou a moeda para ver com qual carro irá trabalhar na terça-feira. A probabilidade de ele ir com o carro preto é p , e ir novamente com o carro azul é de $1-p$.

$$P\{X_1 = A | X_0 = A\} = 1-p \text{ ou } P\{X_1 = P | X_0 = A\} = p$$

Para a quarta-feira é preciso considerar o que ocorreu na terça-feira:

$$P\{X_2 = A | X_0 = A\} = (1-p)(1-p) + pq$$

ou

$$P\{X_2 = P | X_0 = A\} = (1-p)p + p(1-q)$$

Poderíamos continuar calculando as probabilidades conforme o método demonstrado acima, entretanto, é possível utilizar um método mais sistemático armazenando as informações de distribuição em um vetor de linha chamado de vetor da distribuição inicial cuja representação é:

$$(p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots)$$

Onde: $p_i^{(0)} = P(X_0 = i), i = 0, 1, \dots$ é a distribuição de probabilidade inicial dos estados, e $0 \leq p_i^{(0)} \leq 1, \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(0)} = 1$.

Para uma cadeia de Markov com um número finito de estados, seja $P^{(n)}$ a matriz de probabilidades de transição em n passos, temos, $P^{(n)} = P.P^{(n-1)} = P.P.P^{(n-2)} = \dots = P^n$.



Exemplificando

Exemplo adaptado de Campos (2017, cap. 11, recurso eletrônico).

Considerando um sistema de comunicação que transmite os dígitos 0 e 1 por vários estágios, e em cada estágio, a probabilidade de que o mesmo dígito seja recebido ou transmitido para o próximo estágio é 0,75. Simule a probabilidade de que um 0 que entrou no primeiro estágio seja recebido como 0 no quinto estágio?

Para solucionar o problema, devemos identificar inicialmente a matriz de probabilidades de transição.

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

O que se deseja conhecer é P^4

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5625 & 0,4375 \\ 0,4375 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,5625 & 0,4375 \\ 0,4375 & 0,5625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5313 & 0,4687 \\ 0,4687 & 0,5313 \end{pmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de se ter um número **0** é de **0,5313** ou **53,13%**.

De uma forma geral, as probabilidades dos estados que compõem uma cadeia de Markov tendem a um valor limite, desde que seja admitido como constante a matriz de probabilidade de transição de um estado para outro (MOREIRA, 2010, p. 341).



Assimile

Cadeias de Markov pressupõe a existência de matriz de probabilidade de transição, ou seja, a probabilidade de mudança de estado no futuro. Essa matriz é quadrada de ordem n , ou seja, tem n linhas e n colunas. A solução de cadeias de Markov passa, muitas vezes, pela multiplicação da matriz por ela mesma várias vezes dependendo de qual estado futuro deseja-se conhecer. Portanto, é importante conhecer como se executa a multiplicação de matrizes de mesma ordem e de matriz linha por matriz quadrada.

Cadeias de Markov contínuas

Até aqui partimos do pressuposto que o parâmetro relativo ao tempo era discreto ($t = 0,1,2,\dots$), o que é adequado em muitos problemas.

Entretanto em alguns casos, como no estudo das filas (como veremos na próxima seção), é necessário considerar o tempo como sendo um parâmetro contínuo devido à necessidade de observar a evolução do fenômeno em estudo de maneira contínua. Ainda que

o parâmetro relativo ao tempo seja contínuo em vez de discreto, a definição descrita para cadeia de Markov discreta é válida igualmente, ou seja, é considerado um processo “sem memória”.

Cadeias de Markov contínua apresenta espaço de parâmetros de forma contínua, e espaço de estados discreto.

De maneira semelhante às cadeias de Markov discretas, identificamos os estados possíveis do sistema como $0, 1, 2, \dots, M$. Iniciando a análise no instante 0 , e que o parâmetro tempo t' evolua continuamente de forma que $t' \geq 0$.

Um processo estocástico de tempo contínuo $\{X(t'); t' \geq 0\}$, onde $X(t')$ é a variável aleatória em t' , possui propriedade markoviana se:

$P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i \text{ e } X(r)=x(r)\}=P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$ para todo $i, j = 0, 1, \dots, M$ e para todo $r \geq 0$, $s > r$ e $t > 0$. Onde r representa o tempo passado, s o tempo presente e $t+s$ é o tempo futuro t em relação a s .

Podemos notar que $P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$ é uma probabilidade de transição, mas que agora pode assumir valores contínuos, ou seja, não é preciso que seja um valor inteiro.

Aplicações de cadeias de Markov

Nos mais diversos tipos de empresas, os eventos acontecem segundo a cadeia de Markov permitindo a simulação de diversos cenários diferentes com a finalidade de elaborar estratégias para cada situação.

Através dos fundamentos da cadeia de Markov é possível simular a evolução das participações de mercados de empresas concorrentes entre si, desde que seja conhecida a participação inicial e a matriz de probabilidade de transição de uma marca para outra (MOREIRA, 2010). Desta forma, é possível prever os efeitos das estratégias adotadas pelas marcas para se protegerem da ação dos concorrentes.

Imaginemos duas empresas que atuam como prestadores de serviços de manutenção elétrica em indústrias de uma cidade. Hipoteticamente, vamos supor que existam 4000 empresas nessa cidade e que a empresa P atenda 2400 empresas, enquanto a empresa Q atende as 1600 empresas restantes. Logo, podemos calcular que a empresa P possui 60% do mercado enquanto a empresa Q tem 40%.

Foi feita uma pesquisa sobre a satisfação das empresas e qual sua possibilidade de trocar o prestador de serviço pelo outro. O resultado da pesquisa revelou a probabilidade de trocar de prestador de serviço segundo a matriz de probabilidade de transição demonstrada no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 | Matriz de probabilidade de transição de uma empresa para outra

	Para a empresa	
Da empresa	P	Q
P	0,85	0,15
Q	0,08	0,92

Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos prever a participação no mercado de cada empresa considerando o instante $t + 1$ multiplicando a matriz de probabilidade de transição pela probabilidade de estado inicial no instante t .

$$[0,6 \quad 0,4] \times \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,08 & 0,92 \end{bmatrix} = [0,6 \times 0,85 + 0,4 \times 0,08 \quad 0,6 \times 0,15 + 0,4 \times 0,92] = [0,542 \quad 0,458]$$

Portanto, para o instante $t + 1$ imediatamente após o instante t é presumido que a empresa **P** será responsável pela manutenção de **54,2%** das empresas e a empresa **Q** atenderá aos **45,8%** do mercado.

Como vimos anteriormente, é possível calcular os instantes futuros caso a matriz de probabilidade de transição não sofra modificação.

Cadeias de Markov também são utilizadas em problemas envolvendo a simulação de estoques. Lojas que trabalham com determinado modelo que pode ser repostado junto ao fornecedor periodicamente. Supondo que a demanda seja uma variável aleatória independente, o proprietário da loja deseja saber sobre como o processo estocástico evolui ao longo do tempo a fim de construir um modelo para elaborar uma política de reposição de seu estoque.

Outra aplicação clássica das cadeias de Markov é conhecido como a Ruína do Apostador. Considere um apostador apostando no resultado de uma sequência de lançamentos independentes de uma moeda justa. Se der cara, ele acrescenta um valor à sua carteira. Se a moeda der coroa, ele perde o mesmo valor. Se ele conseguir uma

fortuna de um valor predeterminado por ele, o apostador irá parar de jogar. Se a carteira dele estiver vazia, ele deve parar de apostar.

A situação do apostador pode ser modelada, e simulada, e duas questões poderão ser respondidas: quanto tempo levará para o jogador chegar a uma das duas situações possíveis? Quais são as probabilidades das duas possibilidades?

Sem medo de errar

A diretoria de uma empresa do setor metal-mecânico deseja saber qual a demanda mais provável de seu novo produto a ser lançado nos próximos três meses. Foi encomendado um estudo através do comportamento no mercado de produtos similares aos que será lançado.

Os estudos realizados a pedido da diretoria indicam que o primeiro mês tem 35% de chance de ter uma demanda de até 3000 unidades (considerado pela diretoria como sendo de alta demanda) e 65% de ter uma demanda de até 1000 unidades (baixa demanda). O estudo também indicou que caso a demanda seja alta, a imediatamente posterior tem probabilidade de 75% de ser alta e 25% de ser baixa, mas se a demanda for baixa, a imediatamente posterior terá 50% de ser alta e 50% de ser baixa.

Para solucionar o problema, inicialmente é preciso montar a matriz de probabilidade de transição, conforme o Quadro 3.3.

Quadro 3.3 | Matriz de probabilidade de transição para as demandas

Demanda atual	Demanda futura	
	Alta	Baixa
Alta	0,75	0,25
Baixa	0,50	0,50

Fonte: elaborado pelo autor.

Para calcularmos a demanda, aplicaremos: $P^{(n)} = P_0 \cdot P^n$

Para o primeiro mês: $P^1 = [0,35 \quad 0,65] \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix}$

Para o segundo mês: $P^2 = [0,35 \quad 0,65] \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix}^2$

Para o terceiro mês: $P^3 = [0,35 \quad 0,65] \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix}^3$

Calculando a multiplicação das matrizes temos:

Para o primeiro mês teremos 58,75% de termos alta demanda e 41,25% de termos baixa demanda.

No segundo mês, serão 64,69% a chance de ter alta demanda e 35,31% de termos baixa demanda.

E no terceiro mês, a probabilidade de termos alta demanda é de 66,18% e de baixa demanda é de 33,82%.

Pronto! Você resolveu mais um problema através da Pesquisa Operacional.

Avançando na prática

Mudança de marca

Descrição da situação-problema

A diretoria agora deseja saber qual a probabilidade de um potencial cliente mudar de fornecedor e passar a comprar sua nova peça. A empresa também é constantemente ameaçada pelos concorrentes e, portanto, deseja conhecer qual a probabilidade de perder mercado nesse segmento.

Segundo sua sondagem, chegou-se à matriz de probabilidade de transição conforme o Quadro 3.4:

Quadro 3.4 | matriz de probabilidade de transição

Do fornecedor	Para fornecedor	
	Antigo	Novo
Antigo	0,90	0,10
Novo	0,07	0,93

Fonte: elaborado pelo autor.

Deseja-se saber qual será a participação da empresa nesse segmento daqui a dois meses, sabendo-se que atualmente o concorrente detém 75% de participação daqui a dois meses.

Resolução da situação-problema

O problema pede para calcular a participação no mercado das empresas após dois meses do lançamento do novo produto no mercado, e para o cálculo tem-se a informação referente à intenção de mudança de fornecedor dos clientes.

A matriz de probabilidade de transição é dada no Quadro 3.4, e para o cálculo é necessário multiplicar a participação do estado atual com a matriz de transição no estado referente ao segundo mês: $P^{(n)} = P_0.P^n$

$$[0,75 \quad 0,25] \cdot \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0,07 & 0,93 \end{pmatrix}^2$$

Temos como resultado a seguinte situação: 64,48% do mercado permanecerá com o atual fornecedor, enquanto 35,52% será a participação da empresa após dois meses.

Novamente, resolvido graças à sua dedicação aos estudos!

Faça valer a pena

1. Processo de Markov são considerados como processos estocásticos, ou seja, um conjunto indexado de variáveis aleatórias $\{X_t, t \in T\}$, sendo $t \in T$. O conjunto de todos os valores que X_t pode assumir é chamado de espaço de estados. O processo de Markov pode ser classificado segundo a combinação de seus espaços de estados e estados de parâmetros.

Um processo estocástico é classificado como uma cadeia de Markov discreta quando:

- Se o espaço de parâmetros for discreto, e o espaço de estados for contínuo.
- Se o espaço de parâmetros for contínuo, e o espaço de estados for discreto.
- Se o espaço de parâmetros for contínuo, e o espaço de estados for contínuo.
- Se o espaço de parâmetros for discreto, e o espaço de estados for discreto.
- Se o espaço de parâmetros for inteiro, e o espaço de estados for finito.

2. (Exercício adaptado de CAMPOS, 2017, Cap. 11) Suponha que o estado social ou financeiro de uma pessoa possa ser classificado como de *classe baixa*, denotado por 1, de *classe média*, denotado por 2, ou de *classe alta*, denotado por 3. Admite-se que a classe de um indivíduo depende apenas da classe do seu predecessor imediato. Seja a matriz de probabilidades de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

e que, em dada geração inicial, o percentual de indivíduos nas classes 1, 2 e 3 é, respectivamente, 40 %, 50 % e 10 %.

Quais as percentagens de indivíduos em cada classe daqui a três gerações?

- a) 30%; 50,4%; 19,6% (respectivamente: baixa, média, alta).
- b) 17,5%; 62,9%; 19,6% (respectivamente: baixa, média, alta).
- c) 17,5%; 41,3%; 41,2% (respectivamente: baixa, média, alta).
- d) 22,5%; 55,74%; 21,76% (respectivamente: baixa, média, alta).
- e) 40%; 44%; 16% (respectivamente: baixa, média, alta).

3. (Exercício adaptado de CAMPOS, 2017, Cap. 11) Suponha que o estado social, ou financeiro, de uma pessoa possa ser classificado como de *classe baixa*, denotado por 1, de *classe média*, denotado por 2, ou de *classe alta*, denotado por 3. Admite-se que a classe de um indivíduo depende apenas da classe do seu predecessor imediato. Seja a matriz de probabilidades de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

e que, em dada geração inicial, o percentual de indivíduos nas classes 1, 2 e 3 é, respectivamente, 40 %, 50 % e 10 %.

Se um indivíduo é da classe média, qual é a probabilidade de que seu neto venha a ser da classe alta?

- a) 15%
- b) 16%
- c) 33%
- d) 40%
- e) 69%

Seção 3.2

Teoria das filas – simulação

Diálogo aberto

É senso comum imaginar que filas se formam devido ao excesso de demanda por um serviço, acima da capacidade de atendimento do sistema (MOREIRA, 2007, p. 298), porém, é preciso analisar outros fatores que estão envolvidos.

Para que não haja a formação de fila, podemos pensar em aumentar a capacidade de atendimento, disponibilizando maior número de postos de serviço. Entretanto, existem outros fatores, além do número de atendentes, que condicionam a operação do sistema, provocando um congestionamento no serviço. É exatamente isso que iremos estudar nesta seção.

Para facilitar o entendimento dos conceitos, vamos usar um cenário simplificado de uma situação real: Uma empresa que atua no setor metal-mecânico pretende lançar um novo produto. Trata-se de um eixo especial utilizado pelas indústrias automobilística, cujo processo de fabricação inclui usinagem em três tipos diferentes de máquinas (torno, fresadora e retífica). Será montada uma linha exclusiva para a produção desse novo produto que contará com uma máquina de cada tipo (torno, fresa e retífica). A gerência de produção, por meio do estudo de tempos e movimentos, estimou que as taxas médias de processamento são de 15 peças/dia, 12 peças/dia e 20 peças/dia, respectivamente para torno, fresa e retífica.

Para atender a demanda prevista, é estimado que seja necessário encaminhar ordens de produção com taxa média 10 ordens/dia.

Com os dados fornecidos pelo departamento de tempos, movimentos e métodos, você, como futuro supervisor da nova linha, deverá verificar se haverá o surgimento de gargalos utilizando a teoria de filas em sua análise.

Estude atentamente a seção e resolva esse desafio.

Bons estudos!

Não pode faltar

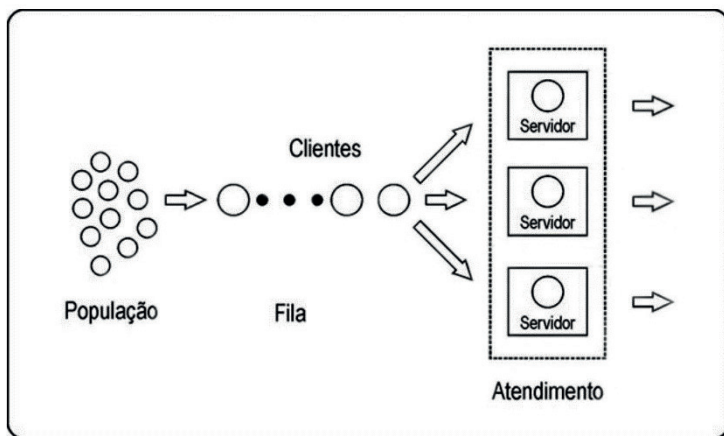
Introdução à Teoria de Filas

Filas estão associadas à ideia de espera por um serviço, um atendimento, e essa ideia deve ser estendida para ser aplicada em uma manufatura. Um bom exemplo disso são peças que esperam para serem trabalhadas e seguem para o próximo processamento. É fácil concluir que a teoria das filas tem aplicação também na programação e controle da produção, seja em um processo de fabricação ou em um serviço.

Em linhas de produção de empresas manufatureiras, a formação de filas, ou congestionamentos, ocorre devido à falta de balanceamento no sistema, ou seja, não está devidamente dimensionado (PRADO, 2014). Esses congestionamentos são conhecidos como gargalos.

Para entendermos os elementos que compõem uma fila, vamos imaginar o seguinte cenário: em uma certa população, surgem clientes que formam uma fila que aguardam por algum tipo de atendimento (serviço). Após ser atendido, o cliente sai do sistema, conforme a Figura 3.1.

Figura 3.1 | Elementos de uma fila



Fonte: Prado (2014).

A população de clientes potenciais que pode precisar de atendimento do sistema também é chamada de fonte de clientes (MOREIRA, 2010, p. 304) e pode ser finita ou infinita. As fontes são ditas infinitas quando a população é muito grande de forma que a chegada de um novo cliente não afeta a taxa de chegada de clientes subsequentes (por exemplo, chegadas no metrô) e são chamadas de independentes (PRADO, 2014). Quando a população é pequena, o efeito pode ser considerável.

A teoria das filas, como se viu, tem aplicação nas mais variadas situações corriqueiras, tanto do indivíduo quanto das empresas (sejam de manufatura ou de serviços), pois envolvem processos de chegada, de atendimento e de saída do sistema. Seu correto entendimento e aplicação permite um atendimento (ou processamento) mais ágil, aumentando a satisfação do cliente e evitando atrasos na produção de bens. Nessa linha, a simulação permite a melhor compreensão da dinâmica do sistema e das decisões que podem ser tomadas para melhorar os níveis de serviços. Uma forma de simular sistemas de filas é utilizar softwares como o ARENA e o ProModel.

Principais características de uma fila

Além da população, existem outros fatores que são responsáveis pelos congestionamentos, ou seja, pela formação de filas.

Os principais fatores que interferem a operação de um sistema, afetando o seu desempenho, podem ser classificados em quatro categorias (ANDRADE, 2015):

- Modo de chegada
- Forma do atendimento
- Disciplina da fila
- Estrutura do sistema

— Modo de chegada: Existem alguns aspectos que devem ser estudados quanto ao comportamento de chegada dos clientes. Inicialmente, vamos considerar que os clientes podem chegar isoladamente ou em grupos. O cliente pode chegar sozinho ao

posto de atendimento, como um cliente que vai fazer um depósito no caixa eletrônico; ou em grupos, como um grupo de estudantes que chega nas bilheterias de um parque, ou, ainda, um lote de peças a serem processadas chegando ao setor de usinagem (MOREIRA, 2007, p. 305).

A chegada de clientes ocorre de uma maneira aleatória, totalmente ao acaso, em outras palavras, ela independe do instante atual ou do tempo que tenha passado desde a última chegada de um cliente ou do término do último atendimento. Nesses casos, os intervalos de tempo são descritos pela distribuição exponencial (ARENALES, 2013, p. 445). A distribuição exponencial é a única distribuição de probabilidade de variável contínua com propriedade de falta de memória (propriedade Markoviana), que significa que cada chegada é independente das anteriores e que, por sua vez, não vai alterar as chegadas posteriores a ela (MOREIRA, 2007, p. 306).

Vejamos um cenário para ilustrar, quantitativamente, o modo de chegada:

Um simulador anotou, minuto a minuto, o número de pessoas que chegava em um posto de vacinação durante o período de uma hora e anotou conforme o Quadro 3.5.

Quadro 3.5 | Chegada de pessoas por minuto em uma hora

2	1	2	1	2	1	0	1	2	0
1	2	3	2	3	3	4	5	1	3
1	1	1	2	0	1	1	0	2	1
2	1	2	6	1	3	3	3	2	2
1	5	1	2	3	6	2	2	0	3
3	1	2	1	1	4	3	1	4	1

Fonte: elaborado pelo autor.

Somando o número de pessoas que chegaram no posto de vacinação (120) no período de uma hora (60 minutos), temos como taxa de chegada ao posto: $\lambda = \frac{120}{60} = 2$ chegadas por minuto.

O intervalo médio de chegada (IC) pode ser calculado como sendo $IC = \frac{1}{\lambda}$, no caso do posto de saúde, as pessoas chegam com

$$IC = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ minutos.}$$

Sabendo que a chegada tem comportamento aleatório descrito pela distribuição exponencial e conhecendo o tratamento matemático das equações envolvidas, é possível estabelecer a relação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson. Portanto, as chegadas dos clientes são aceitas através da distribuição de Poisson, que é dada pela equação:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

onde:

λ = taxa de chegada (número médio de chegadas em determinado tempo)

e = número neperiano (2,7183...)

$x!$ = fatorial de x

– Forma de atendimento: para um bom atendimento, é necessária uma estrutura montada composta por vários elementos como: dimensionamento correto da capacidade, treinamento dos atendentes, tempo de disponibilidade para o atendimento, número de postos de atendimento, instalação, equipamentos, procedimentos, sistema de informação, entre outros. Esses elementos interagem entre si e os resultados podem ser sentidos pelos clientes no tempo gasto em cada atendimento ou no número de atendimentos que o sistema consegue fornecer.

Quantitativamente, o processo de atendimento é calculado de forma semelhante ao processo de chegada, sendo utilizado a letra grega μ para representar a taxa de atendimento, e o tempo médio de atendimento (TA) calculado segundo $TA = \frac{1}{\mu}$. O Quadro 3.6 exemplifica os tempos de atendimento, por exemplo, no posto de vacinação.

Quadro 3.6 | Tempo de atendimento no posto de saúde em segundos

23	15	17	24	16	19	17	19	15	25
21	18	16	20	24	23	22	25	22	25
16	17	21	25	15	22	23	22	16	21
25	19	22	15	16	24	19	19	21	22
20	15	16	24	15	23	21	23	15	22
20	24	19	19	16	22	24	22	22	15
18	25	16	18	24	18	24	20	24	17
22	23	19	24	18	25	21	24	22	16
23	15	23	21	21	18	20	18	15	15
21	17	19	17	22	17	20	20	16	21

Fonte: elaborado pelo autor.

O tempo médio de atendimento será a soma dos tempos de atendimento dividido pelo número de observações, ou seja,

$$TA = \frac{2000}{100} = 20 \text{ segundos, ou } 0,33 \text{ minutos, o que nos leva a}$$

$$\mu = \frac{1}{0,33} = 3 \text{ pessoas por minuto.}$$

– Disciplina da fila: em uma fila composta por clientes aguardando atendimento, o critério de como esses clientes serão atendidos é conhecido como disciplina da fila (MOREIRA, 2007, p. 309). De uma forma geral, o critério utilizado no atendimento é o Primeiro que Entra é o Primeiro que Sai (PEPS), (FIFO - First In, First Out; em inglês), ou seja, o primeiro cliente que chega será o primeiro a ser atendido. Mas o critério PEPS no atendimento do pronto atendimento de um hospital não pode ser aplicado, considerando que alguns casos são mais graves ou urgentes que outros. Existem, portanto, outros critérios que podem ser adotados como o atendimento prioritário às pessoas idosas, pessoas com crianças de colo, grávidas, etc. Outros critérios, como o Menor Tempo de Processamento (MTP), que impõe que a execução do trabalho de menor tempo de processamento seja executada primeiro, e a Data Devida (DD), que determina que o trabalho a ser executado será o que tem a data de entrega mais próxima (MOREIRA, 2007, p. 310).

Estudaremos somente casos que obedecem ao PEPS.

– Estrutura do Sistema: no estudo da teoria das filas, é importante, também, que se determine a estrutura do sistema. Os sistemas de filas podem ter estruturas variadas e cada uma exige um estudo diferente (ANDRADE, 2015).

A estrutura mais simples consiste em uma fila e um posto de atendimento, conforme a Figura 3.2. Um exemplo desse tipo de fila é quando vamos ao banco e precisamos tirar uma senha para ser atendido pelo caixa, ou pelo gerente. Geralmente, existe um atendente que pergunta o tipo de atendimento que você precisa e depois entrega a senha.

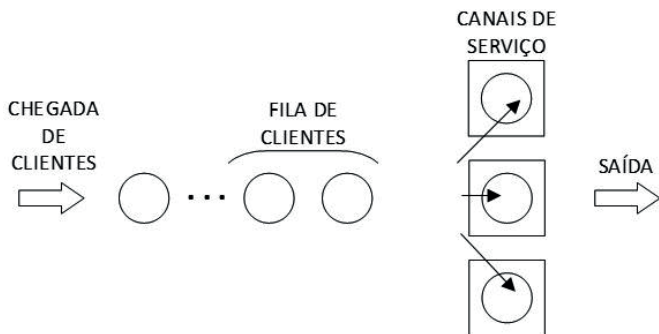
Figura 3.2 | Sistema com uma fila e um posto de atendimento



Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Na Figura 3.3, o sistema é composto por uma fila e três postos de atendimentos. Imaginemos que depois de retirar a senha para ser atendido no caixa, você aguarda em uma outra fila para ser atendido por um dos três caixas em serviço (três caixas é somente um exemplo, o número de postos de atendimento pode variar dependendo do dia do mês, ou mesmo, do período do dia).

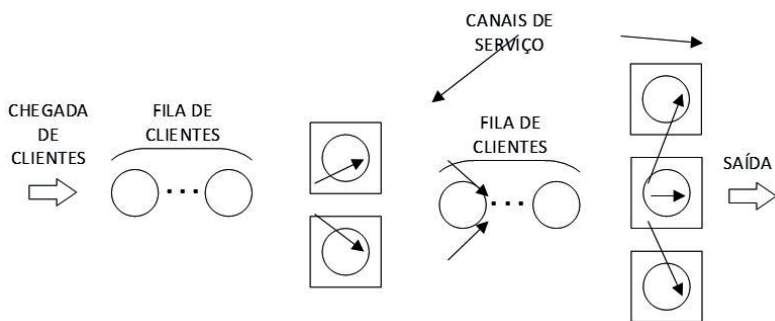
Figura 3.3 | Sistema com uma fila e três postos de atendimento



Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Um sistema complexo de fila é ilustrado pela Figura 3.4, composto por filas e canais em série e em paralelo. O atendimento de uma clínica de exames laboratoriais é um exemplo de um sistema complexo. O cliente, ao chegar na clínica, deve fazer a triagem (seleção de tipos de exames que precisa fazer) em um dos postos de atendimentos (canais de serviços). Logo após a triagem, o cliente é direcionado para o setor de coleta de material, onde estão os atendentes que farão o procedimento de coleta e o encaminhamento, e depois aguarda até ser chamado.

Figura 3.4 | Sistema complexo de fila



Fonte: adaptada de Andrade (2015).

De uma forma geral, um modelo de fila pode ser identificado pela notação conhecida como notação de Kendal, em homenagem ao seu criador David Kendal.

O modelo de fila mais simples é representado como:

$$A/B/m$$

- A refere-se à distribuição de probabilidade do processo de chegada.
- B representa a distribuição do tempo de atendimento.
- M seria o número de postos de atendimentos.

As distribuições correspondentes ao processo de chegada e de atendimento são representadas como:

- M = distribuição exponencial negativa (ou markoviana, ou Poisson).

- D = distribuição degenerada (tempos constantes).
- E_k = distribuição de Erlang (parâmetro de forma = k).
- G = distribuição geral.

Portanto, uma fila representada por **M/M/1** indica que a chegada dos clientes corresponde a uma distribuição exponencial, bem como o tempo de atendimento, com somente um posto de atendimento no sistema.

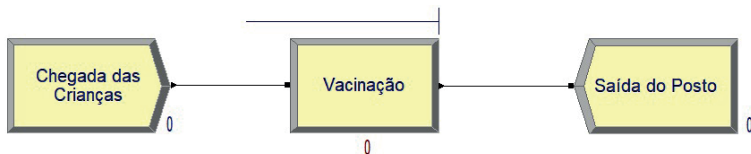


Exemplificando

A Secretaria de Saúde de uma cidade do interior está se planejando para o dia nacional contra a poliomielite e pretende colocar somente uma enfermeira em uma escola de um bairro distante. Segundo estudos, é esperado que as crianças a serem vacinadas cheguem a uma taxa de chegada $\lambda = 3,5$ e o atendimento seja feito segundo a taxa de $\mu = 3$. O atendimento será segundo a ordem de chegada, ou seja, o primeiro que chegar será o primeiro a ser atendido. O secretário da saúde deseja saber se durante o período de vacinação entre as 8:00 h até 12:00h um atendente será suficiente para o atendimento e, para isso, pretende simular o sistema do posto de vacinação usando o ARENA.

O modelo de simulação do posto de vacinação na escola ficará segundo a Figura 3.5.

Figura 3.5 | Modelo de simulação do Posto de Vacinação



Fonte: elaborada pelo autor.

Os parâmetros da chegada e do atendimento podem ser vistos nas Figuras 3.6 e 3.7, respectivamente.

Figura 3.6 | Parâmetros de chegada ao posto de vacinação

The 'Create' dialog box is used to define arrival parameters. It includes the following fields:

- Name:** A dropdown menu with 'Chegada das Crianças' selected.
- Entity Type:** A dropdown menu with 'Crianças' selected.
- Time Between Arrivals:**
 - Type:** A dropdown menu with 'Expression' selected.
 - Expression:** A dropdown menu with 'EXP0(3,5)' selected.
 - Units:** A dropdown menu with 'Minutes' selected.
- Entities per Arrival:** A text input field with '1' entered.
- Max Arrivals:** A text input field with 'Infinite' entered.
- First Creation:** A text input field with '0.0' entered.

At the bottom, there are three buttons: 'OK', 'Cancelar', and 'Ajuda'.

Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

Figura 3.7 | Parâmetros de atendimento no posto de vacinação

The 'Process' dialog box is used to define service parameters. It includes the following fields:

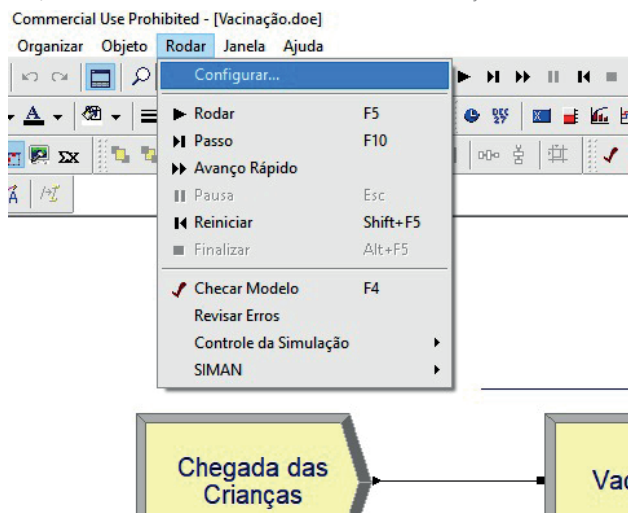
- Name:** A dropdown menu with 'Vacinação' selected.
- Type:** A dropdown menu with 'Standard' selected.
- Logic:**
 - Action:** A dropdown menu with 'Seize Delay Release' selected.
 - Priority:** A dropdown menu with 'Medium(2)' selected.
 - Resources:** A list box containing 'Resource, Enfermeira, 1' and '<End of list>'. To the right of the list box are three buttons: 'Adicionar...', 'Editar...', and 'Apagar'.
- Delay Type:** A dropdown menu with 'Expression' selected.
- Units:** A dropdown menu with 'Minutes' selected.
- Allocation:** A dropdown menu with 'Value Added' selected.
- Expression:** A dropdown menu with 'EXP0(3)' selected.
- Report Statistics:** A checked checkbox.

At the bottom, there are three buttons: 'OK', 'Cancelar', and 'Ajuda'.

Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

É preciso entrar com os parâmetros referentes ao tempo de simulação, número de replicações e unidades de tempo. O quadro onde se encontram essas informações é encontrado em Rodar na linha de comandos conforme a Figura 3.8.

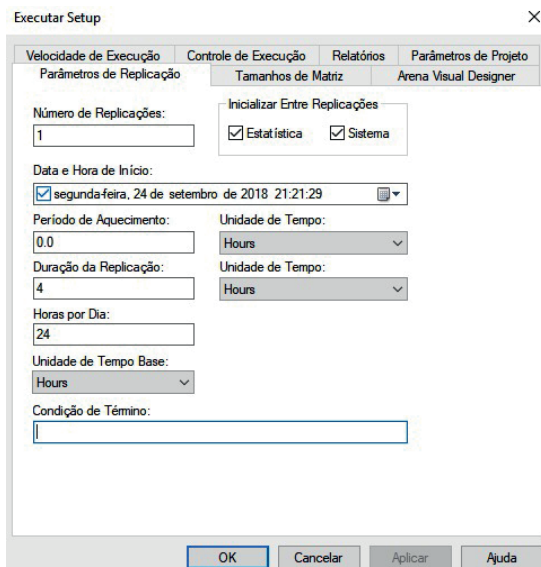
Figura 3.8 | Parâmetros do comando executar a simulação



Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

Os parâmetros são preenchidos como visto na Figura 3.9.

Figura 3.9 | Preenchimento dos parâmetros de execução da simulação



Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

Após o ARENA correr a simulação, vamos analisar os resultados:

- Tempo médio na fila: 0,4582 horas
- Número de crianças que entraram no posto das 8h até 12h: 74
- Número de crianças que saíram no posto das 8h até 12h: 62

Podemos concluir que o atendimento deverá se estender além do período previsto para atender a todas as crianças que procurarem o posto durante a campanha de vacinação, e o tempo médio de espera na fila é de 0,4582 hora, ou seja, quase 30 minutos para a criança ser vacinada.



Pesquise mais

A Distribuição de Poisson é a distribuição de variável aleatória que nos dá a probabilidade de uma série de eventos ocorrer, sendo que um deles independe do outro. O vídeo Processo de Poisson 1 começa a derivar a expressão de Poisson.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=zGZqsEeld3U&index=4&list=PL5uJakN_2TWYwx9K2B5I0-_eExmJbAmb4>. Acesso em: 6 set. 2018.

- Medidas de desempenho em simulação de teoria das filas

O estudo de um sistema de filas, nos permite calcular diversas medidas de desempenho, ou efetividade, do sistema (ANDRADE, 2015), e a escolha do parâmetro depende do objetivo do estudo do sistema.

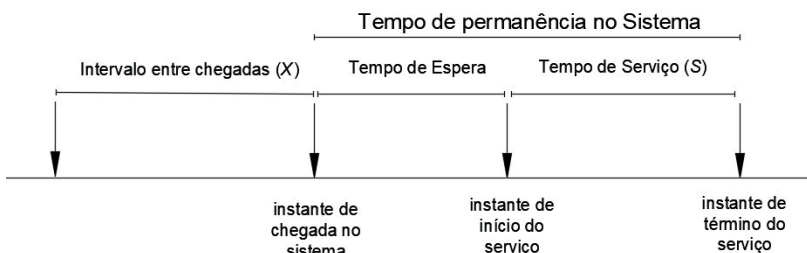
Os principais indicadores são:

- O tempo em que o posto de atendimento permanece ocioso ou ocupado.
- O tempo médio que cada cliente gasta na fila de espera.
- O tempo médio gasto pelo cliente no sistema, ou seja, a média dos tempos computados desde o instante de entrada até o momento de saída.
- O número médio de clientes na fila, por unidade de tempo (tamanho médio da fila).

- O número médio de clientes no sistema em uma unidade de tempo.
- A probabilidade de existir um número n de clientes no sistema.

A Figura 3.10 ilustra os tempos de espera, serviço e permanência do cliente no sistema.

Figura 3.10 | Chegadas, inícios e términos de serviço



Fonte: adaptada de Arenales (2013).

Os intervalos entre chegadas (X) e o tempo de serviço (S) são, geralmente, considerados como variáveis aleatórias contínuas e, portanto, com média $E(X)$ e $E(S)$ respectivamente.

Conhecendo a média dos intervalos de chegada, podemos calcular a taxa de chegada como:

$$\lambda = \frac{1}{E(X)}$$

e a taxa de serviço:

$$\mu = \frac{1}{E(S)}$$

O fator de utilização do sistema ρ , também conhecido como razão de utilização, é definido como sendo a razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço, temos, portanto:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Onde m é o número de postos de atendimentos (em paralelo) no sistema.

Iremos, a seguir, estudar alguns modelos de fila com taxa de chegadas segundo a distribuição exponencial.

- Sistema de Um Canal e Uma Fila com População Infinita (M/M/1)

Esse modelo de sistema foi ilustrado pela Figura 3.2, apresenta uma fila e um canal de serviço ($m = 1$) e tem como características: a taxa de chegada dos clientes são, segundo a distribuição de Poisson, com média λ ; os tempos de atendimento seguem a distribuição exponencial negativa; a disciplina da fila é do tipo PEPS; a população a ser atendida é suficientemente grande para considerarmos como sendo infinita.

A equação básica do sistema é:

$$P(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right); \text{ a probabilidade de haver } n \text{ clientes no sistema}$$

Caso deseje calcular a probabilidade de o sistema estar ocioso, n é igual a zero.

$$P(n = 0) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)$$

A probabilidade de que o sistema esteja ocupado é dada pela taxa de ocupação do sistema (ρ), como no sistema tem somente um canal de atendimento, temos:

$$P(n > 0) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

A probabilidade de que o número de clientes no sistema seja superior a um certo valor r :

$$P(n > r) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r+1}$$

Caso o estudo deseje saber o número médio de clientes no sistema, a equação a ser usada é:

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

E o número médio de clientes na fila:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

O tempo médio gasto pelo cliente na fila é calculado conforme a equação:

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

O tempo médio de permanência no sistema:

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

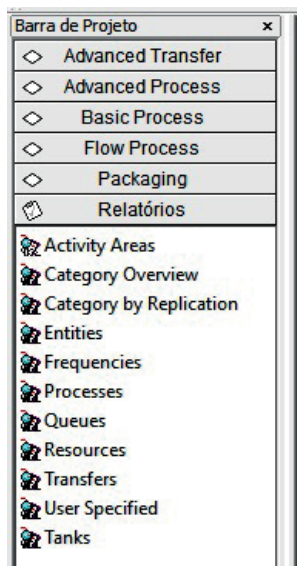


Assimile

O ARENA disponibiliza uma série de relatórios para a análise do comportamento e do sistema que está sendo simulado.

Após rodar a simulação, basta selecionar a aba Relatórios na área de templates, conforme Figura 3.11, em que uma série de informações estarão disponíveis, como o tempo médio na fila, número médio de entidades em filas, etc.

Figura 3.11 | Opções de relatórios disponíveis no ARENA



Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

- Sistema de uma Fila e Diversos Canais (M/M/s)

O sistema de uma fila com diversos canais de serviço foi ilustrado na Figura 3.3, e as características desse modelo são: chegadas segundo a distribuição de Poisson; tempos de atendimento, por canal, que seguem a distribuição exponencial

negativa, com média de $1/\mu$; atendimento conforme PEPS; o número de canais de serviço no sistema é m ; o número de clientes é suficientemente grande para que a população possa ser considerada infinita; o ritmo de serviço é μm ; e a condição de estabilidade do sistema é $\lambda < \mu m$.

A probabilidade de não haver nenhum cliente no sistema:

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}}$$

Para calcular a probabilidade se ter n clientes no sistema, é preciso analisar duas situações:

Quando o número de clientes é menor que número de canais de serviço ($n < m$):

$$P_n = \rho^n \frac{1}{n!} P(0)$$

Quando o número de clientes é maior ou igual ao número de canais de serviços ($n \geq m$):

$$P_n = \rho^n \frac{1}{m! m^{n-m}} P(0)$$

A probabilidade de todos os canais estarem ocupados:

$$P_{to} = P(n \geq m) = \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} P(0)$$

O número médio de clientes na fila é dado por:

$$NF = \frac{\rho}{m-\rho} P_{to}$$

Tempo médio de espera na fila:

$$TF = NF \frac{1}{\lambda}$$

O número médio de clientes no sistema é:

$$NS = NF + \rho$$

Tempo médio gasto no sistema:

$$TS = NS \frac{1}{\lambda}$$



Como em todos os problemas de Pesquisa Operacional, a teoria das filas deve ser solucionada por meio da construção de um modelo que leve em consideração o processo de chegada, o modo de atendimento, a disciplina da fila, dentre outros pontos aqui estudados. Em outros problemas, como as Programações Lineares, Binária, Inteira e Não-linear foi possível solucionar os problemas com o auxílio de planilhas eletrônicas. Será que existem softwares que poderiam auxiliar na solução de problemas relacionados à teoria das filas?

Sem medo de errar

Uma empresa que atua no setor metal-mecânico pretende lançar um novo eixo utilizado pelas indústrias automobilísticas. Será montada uma linha exclusiva para a produção desse novo produto e contará com uma máquina de cada tipo (torno, fresa e retífica). Estima-se que as taxas médias de processamento são de 15 peças/dia, 12 peças/dia e 20 peças/dia, respectivamente para torno, fresa e retífica.

Para atender a demanda prevista, é estimado que seja necessário encaminhar ordens de produção com taxa média 10 ordens/dia.

A empresa deseja saber se haverá o surgimento de gargalos.

Inicialmente, vamos compreender as informações que compõem o cenário.

As chegadas de ordens chegam a uma taxa média de 10 ordens por dia, portanto, $\lambda = 10$ ordens/dia.

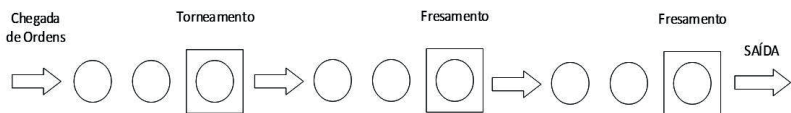
A taxa de processamento do torneamento é de 15 peças/dia, logo, $\mu = 15$ peças por dia.

A taxa de processamento do fresamento é de 12 peças/dia, logo, $\mu = 12$ peças por dia.

A taxa de processamento da retífica é de 20 peças/dia, logo, $\mu = 20$ peças por dia.

Trata-se de filas sequenciais no sistema de produção segundo o modelo $M/M/1$, e o esquema do processo de produção pode ser visto na Figura 3.12.

Figura 3.12 | Filas sequenciais para a produção de eixos



Fonte: elaborada pelo autor.

Para verificar se existe a formação de gargalos, é preciso calcular o número de peças em fila em cada um dos processos.

O cálculo é feito através da fórmula: $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Para o torneamento: $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{15(15 - 10)} = 1,33$ peças

Para o fresamento: $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{12(12 - 10)} = 4,17$ peças

Para a retífica: $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{20(20 - 10)} = 0,5$ peça

Podemos concluir que haverá peças aguardando processamento no torneamento e no fresamento, e a etapa mais crítica é o fresamento. Portanto, haverá formação de gargalos no torneamento e no fresamento (onde é mais crítico).

Avançando na prática

Alteração na demanda e simulação para a aquisição de novas máquinas

Descrição da situação-problema

Após o lançamento do novo produto, houve um aumento na previsão de demanda por ele e a empresa pensa em adquirir novas máquinas para atender. Antes de qualquer decisão, foi pedida uma simulação com o novo cenário.

A nova demanda é atendida com a seguinte taxa de chegada de pedidos: 18 por dia.

Segundo os fabricantes das novas máquinas, as taxas de processamentos são de: 20 peças/dia; 25 peças/dia e 35 peças/dia para o torneamento, fresamento e retífica respectivamente.

Como se comportará o sistema?

Resolução da situação-problema

A nova taxa de chegada é: $\lambda = 25$

Vamos calcular o número de peças com as antigas máquinas

$$\text{Para o torneamento: } NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18^2}{20(20 - 18)} = 8,1 \text{ peças}$$

$$\text{Para o fresamento: } NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18^2}{25(25 - 18)} = 1,85 \text{ peças}$$

$$\text{Para a retífica: } NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{18^2}{35(35 - 18)} = 0,55 \text{ peça}$$

Caso a empresa decida trocar as máquinas segundo as informações dos fabricantes, a formação de gargalos inverteria da fresadora para o torno, conforme os cálculos do número de peças em fila.

Faça valer a pena

1. O critério pelo qual se escolhe a ordem de atendimento dos clientes é conhecido como Disciplina da Fila. Existem critérios que são adotados como o Menor Tempo de Processamento (MTP), a Data Devida (DD) e outros. Imagine um sistema onde não exista atendimento para pessoas com condições especiais como o prioritário de idosos, gestantes etc., nem o atendimento de emergência e urgência.

Neste cenário, qual o critério adotado em uma empresa prestadora de serviço?

- a) PEUS – Primeiro que entra é o último que sai.
- b) UEPS – Último que entra é o primeiro que sai.
- c) MTP – Menor tempo de processamento.
- d) PEPS – Primeiro que entra é o primeiro que sai.
- e) DD – Data Devida.

2. Uma grande rede de supermercados recebe, nos seus dias de pico, 10 clientes a cada minuto. Sabendo-se que a chegada dos clientes nesses dias obedece à distribuição de Poisson,

Qual a probabilidade de que, em um intervalo de um minuto, o caixa receba quatro clientes ou menos?

$$a) \frac{10^5 e^{-10}}{4!}$$

$$b) \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} + \frac{10^3 e^{-10}}{3!} + \frac{10^4 e^{-10}}{4!}$$

$$c) 1 - e^{-10}$$

$$d) (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + (1 - e^{-4})$$

$$e) 1 - \frac{4}{10}$$

3. Em um laboratório de análise clínica, chegam em média 5 clientes, das 12h às 13h, todos os dias. O atendimento inicial de triagem de exames leva em média 4 minutos, e sabe-se que os intervalos de chegadas e de atendimento são exponenciais negativos.

Qual o número médio de pacientes no laboratório (sistema) e o número de pacientes na fila, sabendo que nesse horário há somente um atendente?

- a) 6 pacientes e; 3,6 pacientes (respectivamente).
- b) 5 pacientes e; 3,4 pacientes (respectivamente).
- c) 4 pacientes e; 3,2 pacientes (respectivamente).
- d) 2 pacientes e; 3 pacientes (respectivamente).
- e) 1 paciente e; 2 pacientes (respectivamente).

Seção 3.3

O método de Monte Carlo

Diálogo aberto

Simular significa estudar o comportamento de um sistema acompanhando algumas variáveis de interesse enquanto outras variáveis são alteradas aleatoriamente. O método de Monte Carlo, ou simulação de Monte Carlo, surgiu da revisão de uma técnica matemática durante a Segunda Guerra Mundial, quando cientistas estudavam o comportamento aleatório de nêutrons em materiais radioativos (FREITAS FILHO, 2008). A técnica consiste na geração de dados artificialmente e uma distribuição de frequência das variáveis de interesse.

Atualmente, uma forma eficaz de aplicar o método de Monte Carlo é o uso de planilhas eletrônicas. Nesta seção, aprenderemos a utilizá-lo e a construir modelos no Excel. Para fixar os conceitos sobre sua aplicação, vamos simular o seguinte cenário:

Um novo produto será lançado e o departamento industrial está encarregado de implantar a nova linha de produção. Serão usados dados e informações de operações similares de outros produtos para amparar o planejamento da produção.

As etapas de fabricação, objeto do estudo, são a sequência de corte e torneamento a partir de um tarugo metálico. A partir da análise dos dados, chega-se à conclusão de que os pedidos entram segundo uma distribuição de Poisson, com média de chegada de 6 por hora. Cada pedido corresponde a uma unidade do produto.

O processo de corte corresponde a uma distribuição normal com tempo médio de 15 minutos com desvio padrão de 3,5 minutos. O processo de torneamento obedece a uma distribuição normal com média de 13 minutos com desvio padrão de 1,4 minutos.

Utilize o método de Monte Carlo e simule com o auxílio do MS Excel a nova linha de produção para verificar se haverá gargalos. Como você construirá o modelo no Excel? Esse desafio é mais uma oportunidade de colocar em prática o que você aprendeu.

Bons estudos e bom trabalho.

Não pode faltar

A simulação é definida como a representação de um sistema real a partir de um modelo. Ela considera a utilização de computadores para processar a grande quantidade de cálculos que estão envolvidos no processo de simulação.

O processo da simulação, portanto, consiste em construir um modelo que execute uma rotina sequencial de instruções, de uma maneira repetitiva semelhante a um programa de computador. À medida que as instruções são executadas, as variáveis assumem valores diferentes, uma vez que elas são modificadas de acordo com o passar do tempo. Essa mudança se dá pelo fato de o sistema ser dinâmico e não, estático.

Esse modelo deve imitar o comportamento do problema que está sendo estudado, portanto, as variáveis envolvidas devem assumir um caráter aleatório. Do estudo da estatística e probabilidade, sabemos que o comportamento de uma variável aleatória é descrito por uma distribuição de probabilidade.

Em diversas situações, os modelos de simulação são utilizados para analisar uma decisão sob risco, em outras palavras, um modelo em que o comportamento de um ou mais fatores não é conhecido com certeza, portanto, é considerado como uma variável aleatória (MOORE, 2005). O comportamento de uma variável aleatória é descrito por uma distribuição de probabilidade. O desempenho do sistema real é imitado usando-se distribuições de probabilidades para gerar aleatoriamente diversos eventos que ocorrem no sistema. Esse tipo de simulação é conhecido como método Monte Carlo, ou simulação de Monte Carlo.

Simulação de Monte Carlo

Em uma simulação, o que se deseja é observar o efeito de algumas variáveis sobre outras de interesse, que são os objetos do estudo. Para que seja possível compreender o comportamento do sistema, as variáveis são alimentadas com valores aleatórios enquanto as variáveis de interesse são mensuradas.

No início, esses valores aleatórios eram obtidos em tabelas publicadas por pesquisadores e matemáticos. Um exemplo de tabela de números aleatórios pode ser visto na Tabela 3.1.

Em um segundo estágio, na aplicação da simulação Monte Carlo, os dados eram gerados artificialmente utilizando um gerador de números aleatórios (GNA) que é um programa computacional (algoritmo) que, como o nome mesmo diz, gera números aleatórios independente e uniformemente distribuídos, ou seja, todos têm a mesma probabilidade de ocorrer. Atualmente, é possível gerar números aleatórios através de planilhas, como o Excel.

Tabela 3.1 | Exemplo de tabela com números aleatórios

09656	96657	64842	49222	49506	10145	48455	23505	90430	04180
24712	55799	60857	73479	33581	17360	30406	05842	72044	90764
07202	96341	23699	76171	79126	04512	15426	15980	88898	06358
84575	46820	54083	43918	46989	05379	70682	43081	66171	38942
38144	87037	46626	70529	27918	34191	98668	33482	43998	75733
48048	56349	01986	29814	69800	91609	65374	22928	09704	59343
41936	58566	31276	19952	01352	18834	99596	09302	20087	19063
73391	94006	03822	81845	76158	41352	40596	14325	27020	17546
57580	08954	73554	28698	29022	11568	35668	59906	39557	27217
92646	41113	91411	56215	69302	86419	61224	41936	56939	27816
07118	12707	35622	81485	73354	49800	60805	05648	28898	60933
57842	57831	24130	75408	83784	64307	91620	40810	06539	70387
65078	44981	81009	33697	98324	46928	34198	96032	98426	77488
04294	96120	67629	55265	26248	40602	25566	12520	89785	93932
48381	06807	43775	09708	73199	53406	02910	83292	59249	18597
00459	62045	19249	67095	22752	24636	16965	91836	00582	46721
38824	81681	33323	64086	55970	04849	24819	20749	51711	86173
91465	22232	02907	01050	07121	53536	71070	26916	47620	01619
50874	00807	77751	73952	03073	69063	16894	85570	81746	07568
26644	75871	15618	50310	72610	66205	82640	86205	73453	90232

Fonte: Hillier (2013).



Exemplificando

Vamos imaginar uma experiência a partir da qual queremos conhecer a soma obtida com maior frequência no lançamento de dois dados não viciados e lançados ao mesmo tempo. As somas possíveis são: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. A soma cujo valor é igual a dois é obtida somente quando em ambos os dados saírem a face com o número 1, ou seja, uma chance. O valor 3 é possível quando sair o número 1 em um dos dados e o número 2 no outro, portanto, duas possibilidades. O valor 4 é possível quando em

ambos os dados saírem o número 2 ou quando em um dos dados sair o número 1 e no outro o número 3 totalizando 3 chances, e assim por diante.

A frequência e a frequência acumulada são mostradas no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 | Somas possíveis e frequências no lançamento de dois dados

Soma	Frequência	Frequência acumulada
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

Fonte: adaptado de Moreira (2010).

É possível desde já verificar que a soma com maior frequência será o número 7. Porém, o objetivo é demonstrar como se aplica a simulação empregando números aleatórios.

Vamos acrescentar ao nosso quadro duas novas colunas, uma com a frequência acumulada na forma de milésimos e, na outra, iremos atribuir faixa de números conforme o Quadro 3.8.

As faixas com os números atribuídos consideram o intervalo no qual a frequência acumulada se encontra, ou seja, as faixas são os intervalos de classes da frequência de distribuição de probabilidade. Seu intervalo é fechado no início do intervalo e fechado no final.

Quadro 3.8 | Resultados possíveis com faixa de números atribuídos

Soma	Frequência	Frequência acumulada	Frequência acumulada em milésimos	Faixa de números atribuídos
2	1/36	1/36	0,028	000 - 027

3	2/36	3/36	0,083	028 - 082
4	3/36	6/36	0,167	083 - 166
5	4/36	10/36	0,278	167 - 277
6	5/36	15/36	0,417	278 - 416
7	6/36	21/36	0,583	417 - 582
8	5/36	26/36	0,722	583 - 721
9	4/36	30/36	0,833	722 - 832
10	3/36	33/36	0,917	833 - 916
11	2/36	35/36	0,972	917 - 971
12	1/36	36/36	1,000	972 - 1000

Fonte: adaptado de Moreira (2010).

Vamos usar a Figura 3.13 com os números aleatórios para simular a maior frequência de resultados. Os números aleatórios da figura 3.13 estão na ordem de dezena de milhares e na nossa simulação geramos valores na ordem de centenas, portanto, pegaremos somente as centenas das cinco primeiras linhas da tabela (poderiam ser outros valores, de outras linhas, ou mesmo sem obedecer a nenhuma ordem), totalizando 50 números ao acaso. Dessa forma, saberemos em que faixa elas se encontram e depois atribuiremos o valor da soma para cada número ao acaso. O resultado pode ser visto no Quadro 3.9.

Quadro 3.9 | Resultado das somas atribuídas aos números ao acaso

Número ao acaso	Soma	Número ao acaso	Soma	Número ao acaso	Soma	Número ao acaso	Soma	Número ao acaso	Soma
656	8	712	8	202	5	575	7	144	4
657	8	799	9	341	6	820	9	37	3
842	10	857	8	699	8	83	4	626	8
222	5	479	7	171	5	918	11	529	7
506	7	581	7	126	4	989	12	918	11
145	4	360	6	512	7	379	6	191	5
455	7	406	6	426	7	682	8	668	8
505	7	842	10	980	11	81	3	482	7
430	7	44	3	898	10	171	5	998	12
180	5	764	9	358	6	942	11	733	11

Fonte: elaborado pelo autor.

Somando todos os valores obtidos na coluna “Soma”, totalizaremos 362 e dividindo pelo número de simulações (50), o valor de maior frequência é igual a 7,24, muito próximo do valor 7 o que comprova a validade da simulação. Cabe ressaltar que o número de simulações foi de 50 e se aumentarmos o número de simulações, o resultado se aproximará ainda mais de 7.

Excel como ferramenta para simulação de Monte Carlo

Também é possível usar planilhas, como o Excel, para simular sistemas através do Método Monte Carlo. Nesse caso, a construção do modelo na planilha é seguida pela criação de um campo que gera números aleatoriamente. Agora, vamos aprofundar o assunto estudando uma simulação de Fila como exemplo (ANDRADE, 2015).

Deseja-se estudar a operação de uma cabine telefônica com a finalidade de planejar sua expansão. O funcionamento do sistema é o seguinte:

O cliente chega e ocupa a cabine, caso esteja desocupada. Se estiver ocupada, o cliente deve esperar na fila, não sendo analisada a hipótese de o cliente desistir. Quando a cabine é desocupada, o primeiro da fila entra imediatamente.

Para o planejamento de expansão, são importantes os seguintes dados:

- Tempo médio de espera na fila por cliente;
- Tempo médio gasto no sistema por cliente;
- Tempo médio de utilização da cabine ou, ao contrário, o tempo médio ocioso da cabine.

Por meio de levantamentos estatísticos realizados com essa cabine, sabe-se que a chegada de clientes obedece à distribuição de Poisson, com média de 18 chegadas por hora. O número médio de telefonemas efetuados na cabine por hora é 20, segundo a distribuição de Poisson — ou seja, cada telefonema tem a duração média de 3 min, sendo esta uma variável aleatória que segue a distribuição exponencial negativa.

Para a solução do exemplo, usaremos o Excel para auxiliar nos cálculos. Inicialmente, levantamos a curva acumulada de probabilidades das exponenciais negativas, com médias $\lambda = 18$

chegadas por hora e $\mu = 20$ telefonemas por hora. O cálculo da distribuição acumulada dos intervalos entre chegadas e duração dos atendimentos pode ser visto na Figura 3.13. A função (distribuição exponencial negativa) está em destaque e é usada tanto no intervalo entre chegadas quanto na duração dos atendimentos. É necessário mencionar que a média do intervalo de chegada é igual a: $18 / 60 = 0,3$ e a média da duração dos atendimentos é igual a: $20 / 60 = 0,333$

Figura 3.13 | Cálculo das distribuições acumuladas

E7					=DISTR.EXPON(F7;\$F\$3;VERDADEIRO)		
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Função acumuladas da distribuição exponencial negativa					
3		Média	0,300		Média	0,333	
4							
5		Distribuição Acumulada	Intervalo entre chegadas		Distribuição Acumulada	Duração dos Atendimentos	
6		0	0		0	0	
7		0,0296	0,1		0,0328	0,1	
8		0,0582	0,2		0,0645	0,2	
9		0,0861	0,3		0,0952	0,3	
10		0,1131	0,4		0,1248	0,4	
11		0,1393	0,5		0,1535	0,5	
12		0,1647	0,6		0,1813	0,6	
13		0,1894	0,7		0,2081	0,7	
14		0,2134	0,8		0,2341	0,8	
15		0,2366	0,9		0,2592	0,9	
16		0,2592	1		0,2835	1	
17		0,2811	1,1		0,3070	1,1	
242		0,9992	23,6		0,9996	23,6	
243		0,9992	23,7		0,9996	23,7	
244		0,9992	23,8		0,9996	23,8	
245		0,9992	23,9		0,9997	23,9	
246		0,9993	24		0,9997	24	

Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Conhecendo os valores das distribuições, aplicamos o método de Monte Carlo para produzir as simulações dos intervalos entre chegadas de clientes e as durações dos telefonemas. A Figura 3.14 demonstra a planilha utilizada para essas simulações. Para gerar números aleatórios das colunas “Número Aleatório” (I e K) é usada a função =ALEATÓRIO(). A função em destaque

= **PROCV**(K6;E\$6:\$F\$246;2) procura o valor da célula K6 na matriz formada pelas células E6 e F246 (o sinal \$ indica que a matriz é fixa, ou seja, a procura será feita sempre nesse espaço de dados), e o número 2 indica que a célula assumirá o valor da segunda coluna.



Refleta

A simulação Monte Carlo baseia-se na geração de números aleatórios e na função distribuição de probabilidade. Construímos o modelo considerando a distribuição exponencial na chegada dos clientes e no tempo de ocupação das cabines telefônicas. Entretanto, se o comportamento de chegada e de ocupação das cabines não for conforme a distribuição exponencial, significa que não é possível utilizar o Excel na simulação Monte Carlo?

Figura 3.14 | Resultado das simulações dos intervalos entre chegadas e duração dos telefonemas

L6						
	G	H	I	J	K	L
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
100						
101						
102						
103						
104						
105						

Simulação da operação da cabina telefônica					
	Cliente N°.	Número Aleatório	Intervalo entre chegadas	Número Aleatório	Duração do Serviço
6	1	0,068		0,896	6,7
7	2	0,140	0,5	0,275	0,9
8	3	0,462	2	0,320	1,1
9	4	0,995	17,9	0,505	2,1
10	5	0,528	2,5	0,303	1
11	6	0,524	2,4	0,922	7,6
100	95	0,242	0,9	0,676	3,3
101	96	0,753	4,6	0,492	2
102	97	0,190	0,7	0,111	0,3
103	98	0,342	1,3	0,380	1,4
104	99	0,973	12	0,520	2,2
105	100	0,751	4,6	0,736	3,9

Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Uma vez concluídas as simulações dos intervalos entre chegadas e durações dos telefonemas, passamos a simular a operação da

Com esses dados, podemos calcular:

Comprimento médio da fila: $883,2 / 359,3 = 2,458$

- Tempo médio gasto na fila: $883,2 / 100 = 8,832$ minutos
- Tempo médio gasto no sistema: $1145,6 / 100 = 11,456$ minutos
- Tempo médio de duração dos serviços: $262,4 / 100 = 2,624$ minutos



Pesquise mais

No vídeo *Distribuição de Probabilidade - Simulação de Monte Carlo no Excel*, o autor demonstra como construir modelo e como escolher distribuições de probabilidade em uma simulação pelo método de Monte Carlo. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=rFtyUpTz3v0>>. Acesso em: 19 set. 2018.

Aplicações do método de Monte Carlo

Como vimos no exemplo anterior, a simulação pelo método Monte Carlo pode ser aplicada no estudo do comportamento de filas, simulando o processo de chegada e o tempo de atendimento no sistema. Entretanto, o método Monte Carlo pode ser aplicado em diversas situações em que existam variáveis aleatórias cujos comportamentos são descritos por distribuições de probabilidade. Vejamos algumas aplicações segundo Moore (2005):

1. Projeto de instalações para descarregamento de cargas, quando se deseja responder questões como: quantas plataformas devem ser construídas? Que tipo e em que quantidade é necessária para movimentar o material? Quantos colaboradores são necessários para as operações?

2. Na determinação de políticas de estoque, é possível determinar, por meio da simulação, o momento e a quantidade dos pedidos de reposição, bem como os níveis de estoque, de forma a atender as necessidades dos clientes.

3. Balanceamento de linhas – por meio da simulação pelo método de Monte Carlo é possível balancear as linhas permitindo uma produção de forma contínua, sem sobressaltos durante o processamento.

Essas foram somente uma pequena parte da utilidade do método no ambiente fabril, entretanto, outras aplicações do método de Monte Carlo são possíveis nas mais diversas atividades em empresas de manufatura e serviços.



Assimile

A simulação de sistemas através do método de Monte Carlo com o auxílio do Excel é muito útil e prática, entretanto, para aproveitar todo o potencial que o Excel proporciona, é preciso um amplo conhecimento das funções disponíveis como o "ALEATORIOENTRE", que gera números aleatórios inteiros dentro de uma faixa de valores ou funções distribuições, além da exponencial, que poderão ser usadas para simular outros tipos de distribuições que compõem o estudo da teoria das filas. Portanto, é importante que ao menos se tenha conhecimento da existência dessas funções.

Sem medo de errar

Com o lançamento de um novo produto, o departamento industrial está encarregado de implantar a nova linha de produção. Serão usados dados e informações de operações similares de outros produtos para amparar o planejamento da produção.

As etapas de fabricação, objetos do estudo, são a sequência de corte e torneamento a partir de um tarugo metálico.

A partir da análise dos dados, chegou-se à conclusão de que os pedidos entram segundo uma distribuição de Poisson, com média de chegada de 6 pedidos por hora. Cada pedido corresponde a uma unidade do produto. O processo de corte corresponde a uma distribuição normal com tempo médio de 15 minutos com desvio padrão de 3,5 minutos. O processo de torneamento obedece a uma distribuição normal com média de 13 minutos com desvio padrão de 1,4 minutos.

Foi pedido que você utilizasse o método de Monte Carlo e simulasse o novo sistema, com o auxílio do MS Excel, a existência de gargalos na linha.

O primeiro passo é criar o arquivo com a distribuição exponencial acumulada da entrada, as distribuições normais do corte e do torneamento.

Parte da distribuição referente à entrada de pedidos, considerando média de 0,1 e as distribuições normais de corte e torneamento podem ser observadas na Figura 3.16.

Figura 3.16 | Distribuições referentes à entrada de pedidos, corte e torneamento

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Entrada de Pedidos			Corte			Torneamento	
2	média	0,1		média	15		média	13
3				desvio padrão	3,5		desvio padrão	1,4
4	Distribuição acumulada	Intervalo entre chegadas			Tempo de Corte			Tempo de Torneamento
5	-	0		1	11,5		1	11,6
6	0,010	0,1		2	11,6		2	11,7
7	0,020	0,2		3	11,7		3	11,8
8	0,030	0,3		4	11,8		4	11,9
9	0,039	0,4		5	11,9		5	12
10	0,049	0,5		6	12		6	12,1
11	0,058	0,6		7	12,1		7	12,2
12	0,068	0,7		8	12,2		8	12,3
13	0,077	0,8		9	12,3		9	12,4
14	0,086	0,9		10	12,4		10	12,5
15	0,095	1		11	12,5		11	12,6
16	0,104	1,1		12	12,6		12	12,7
17	0,113	1,2		13	12,7		13	12,8
18	0,122	1,3		14	12,8		14	12,9

Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

Foram feitas cinquenta rodadas de simulação com geração de números aleatórios, comparando com a tabela de distribuições exponencial (referente às entradas de pedido) e com as tabelas de distribuições normais referentes ao corte e torneamento.

A Figura 3.17 mostra desde a entrada do pedido até a finalização do corte. Foi gerado um número aleatório (célula da coluna K) referente à entrada do pedido que “busca” o valor referente ao intervalo de chegada na distribuição acumulada exponencial. O número aleatório gerado na coluna M busca na distribuição normal o tempo de corte referente ao valor gerado. A saída do corte refere-se ao tempo de entrada do pedido mais o tempo de corte do tarugo metálico. O tempo em fila é o tempo de saída menos o tempo de entrada, menos o tempo de processamento (corte).

Figura 3.17 | Cálculo do tempo em fila do material aguardando pelo corte

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
		Pedido n°	Número Aleatório	Intervalo de Chegada	Número Aleatório	Tempo de Corte	Entrada no Corte	Saída do Corte	Tempo na fila
4		1	0,364		45	15,90		15,90	-
5		2	0,300	3,50	42	15,60	3,50	31,50	12,40
6		3	0,457	6,10	60	17,40	9,60	48,90	21,90
7		4	0,582	8,70	29	14,30	18,30	63,20	30,60
8		5	0,920	20,00	14	12,80	38,30	76,00	24,90
9		6	0,871	20,00	61	17,50	58,30	93,50	17,70
10		7	0,079	0,80	2	11,60	59,10	105,10	34,40
11		8	0,818	17,00	66	18,00	76,10	123,10	29,00
12		9	0,458	6,10	69	18,30	82,20	141,40	40,90
13		10	0,396	5,00	59	17,30	87,20	158,70	54,20
14		11	0,900	20,00	49	16,30	107,20	175,00	51,50
15		12	0,944	20,00	40	15,40	127,20	190,40	47,80
16		13	0,165	1,80	9	12,30	129,00	202,70	61,40
17		14	0,004	-	29	14,30	129,00	217,00	73,70

Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

O mesmo raciocínio deve ser usado para calcular o tempo em fila aguardando pelo torneamento, considerando que a entrada no torno é igual a saída do corte. O resultado é mostrado na Figura 3.18.

Figura 3.18 | Cálculo do tempo em fila do material aguardando pelo torno

	O	P	Q	R	S	T	U	V
	Entrada no Corte	Saída do Corte	Tempo na fila	Número Aleatório	Tempo de Torno	Entrada no Torno	Saída do Torno	Tempo na fila
4		15,90	-	27	14,20	15,90	30,10	-
5	3,50	31,50	12,40	23	13,80	47,40	61,20	-
6	9,60	48,90	21,90	4	11,90	96,30	108,20	-
7	18,30	63,20	30,60	2	11,70	159,50	171,20	-
8	38,30	76,00	24,90	27	14,20	235,50	249,70	-
9	58,30	93,50	17,70	19	13,40	329,00	342,40	- 0,00
10	59,10	105,10	34,40	8	12,30	434,10	446,40	-
11	76,10	123,10	29,00	19	13,40	557,20	570,60	- 0,00
12	82,20	141,40	40,90	2	11,70	698,60	710,30	0,00
13	87,20	158,70	54,20	11	12,60	857,30	869,90	0,00
14	107,20	175,00	51,50	2	11,70	1.032,30	1.044,00	0,00
15	127,20	190,40	47,80	12	12,70	1.222,70	1.235,40	0,00
16	129,00	202,70	61,40	13	12,80	1.425,40	1.438,20	- 0,00
17	129,00	217,00	73,70	2	11,70	1.642,40	1.654,10	0,00

Fonte: captura de tela elaborada pelo autor.

O tempo total na fila do corte (para as 50 rodadas de simulação) é de 7334,90 minutos, enquanto o tempo total na fila do torneamento é igual a zero, o que deixa evidente que existirá a formação de gargalo no processamento do corte enquanto não haverá essa situação no processo de torneamento.

Problema de Estoque

Descrição da situação-problema

Para a fabricação de seus produtos, uma empresa do setor metal-mecânico utiliza rolamentos que mantém em estoque. Cada produto utiliza um rolamento. Sabe-se que a demanda média diária é de 40 unidades por dia e que, segundo levantamento de dados históricos, a distribuição é dada segundo o Quadro 3.10.

Quadro 3.10 | Função distribuição da demanda média diária

Demanda	Distribuição	Distribuição Acumulada	Faixa de números
25	0,05	0,05	0 - 5
30	0,10	0,15	06 - 10
35	0,20	0,35	11 - 35
40	0,30	0,65	36 - 65
45	0,20	0,85	66 - 85
50	0,10	0,95	86 - 95
55	0,05	1,00	96 - 100

Fonte: adaptado de Andrade (2015).

O fornecedor dos rolamentos garante uma entrega de 240 rolamentos por semana, em uma semana de 6 dias trabalhados. O problema está na transportadora que vem atrasando as entregas em dois dias (média) e os atrasos têm função de distribuição segundo o Quadro 3.11.

Quadro 3.11 | Função distribuição do atraso em média de dias

Demanda	Distribuição	Distribuição Acumulada	Faixa de números
Atraso	Distribuição	Distribuição Acumulada	Faixa de números
1	0,30	0,30	0 - 30
2	0,40	0,70	31 - 70
3	0,30	1,00	71 - 100

Fonte: adaptado de Andrade (2015).

Além disso, é preciso considerar os custos envolvidos.

Custos de armazenagem: R\$ 5,00 por rolamento por dia.

Custo de falta de estoque: cada produto que se deixa de vender por falta de rolamento representa prejuízo de R\$ 120,00, pois esse é o preço de venda do produto.

A empresa resolveu simular seu sistema de estoque de rolamentos pelo período de 15 dias.

A Política de Gestão de Estoque é confiável?

Resolução da situação-problema

Considerando um estoque inicial de 240 rolamentos:

Como o período de simulação é de 15 dias, será preciso realizar dois pedidos durante o período, que são feitos uma vez por semana, ou seja, nos dias 6 e 12 da simulação.

O atraso dos pedidos é simulado conforme o Quadro 3.12.

Quadro 3.12 | Atrasos de entrega relativo a dois pedidos

Pedido	Número Aleatório	Atraso
1	8	1
2	54	2

Fonte: adaptado de Andrade (2015)

Segundo os números gerados, os pedidos terão atraso de 1 e 2 dias, respectivamente. Portanto, os pedidos serão entregues nos dias 7 e 14.

O resultado da simulação pode ser visto no Quadro 3.13.

Quadro 3.13 | Resultado da simulação

Dia	Número Aleatório	Demanda	Estoque inicial	Estoque Final	Custo de Armazenagem	Custo por Falta
1	13	35	240	205	1025	
2	4	25	205	180	900	
3	34	35	180	145	725	

4	81	45	145	100	500	
5	58	40	100	60	300	
6	37	40	60	20	100	
7	2	25	20	235	1175	
8	29	35	235	200	1000	
9	2	25	200	175	875	
10	6	30	175	145	725	
11	61	40	145	105	525	
12	89	50	105	55	275	
13	7	30	55	25	125	
14	14	35	25	230	1150	
15	79	45	230	185	925	

Fonte: adaptado de Andrade (2015).

Pelo resultado da simulação, é possível observar que apesar dos atrasos na entrega, não há problemas de falta de rolamentos no estoque de peças, o que indica que, no momento, não há necessidade de alteração na política de estoque da empresa.

Faça valer a pena

1. Simular significa representar. No contexto empresarial, simular um sistema significa fazer com que esse sistema possa operar como um sistema real, com objetivo de estudar suas propriedades. Uma ferramenta bastante conhecida para a simulação é o método Monte Carlo (NEUMANN, 2011).

No que consiste o método de Monte Carlo?

- Estimativa para o comportamento entre as chegadas de clientes em uma fila.
- Uma estimativa para a distribuição de probabilidade associada à chegada de clientes em uma fila.
- Sequências de resultados nas quais as probabilidades dos resultados em um instante dependem do ocorrido no instante imediatamente anterior.
- Geração de valores de variáveis, com auxílio de números ao acaso ou aleatórios.
- Sub-rotinas determinísticas para geração de números.

2. Um jogo consiste em jogar uma moeda não viciada sete vezes. A aposta de cada rodada é R\$ 2,00. Caso o jogador consiga uma sequência de 3 caras ele ganha R\$ 5,00, caso contrário ele perde o valor da aposta. O jogador pretende jogar por 10 rodadas e pretende fazer uma simulação pelo método Monte Carlo. Sabendo que ele usou um software que gerou os números aleatório mostrados na Tabela 3.2, considere os números gerados entre 0,0 e 0,50 como cara e 0,51 até 1,00 como coroa.

Tabela 3.2 | Números aleatórios gerados pelo software para a simulação

	lançamento						
	1	2	3	4	5	6	7
rodada 1	0,20	0,82	0,77	0,85	0,92	0,94	0,67
rodada 2	0,59	0,12	0,12	0,75	0,31	0,42	0,57
rodada 3	0,40	1,00	0,89	0,92	0,35	0,73	0,95
rodada 4	0,65	0,46	0,20	0,87	0,80	0,49	0,75
rodada 5	0,17	0,76	0,27	0,47	0,84	0,28	0,67
rodada 6	0,82	0,06	0,80	0,86	0,03	0,44	0,55
rodada 7	0,19	0,81	0,53	0,28	0,55	0,14	0,87
rodada 8	0,96	0,52	0,30	0,41	0,27	0,25	0,80
rodada 9	0,69	0,72	0,95	0,27	0,05	0,28	0,06
rodada 10	0,98	0,40	0,10	0,35	0,06	0,44	0,82

Fonte: elaborada pelo autor.

Quanto o jogador poderá ganhar ou perder após 10 rodadas?

- a) Perde R\$ 2,00.
- b) Perde R\$ 1,00.
- c) Não perde, nem ganha (R\$ 0,00).
- d) Ganha R\$ 1,00.
- e) Ganha R\$ 2,00.

3. Uma empresa que vende embalagens plásticas precisa fazer pedidos para serem entregues até setembro devido à programação das vendas de Natal. A unidade de determinada embalagem custa R\$ 3,00 e é vendida por R\$ 6,00. Como o produto possui detalhes natalinos, se o produto não for vendido até a véspera do Natal, ele é vendido como sucata para reciclagem a um preço de R\$ 0,20 por unidade. Como a venda oscila de ano para ano, a loja fez um levantamento e determinou a distribuição de probabilidade com base nas vendas dos últimos anos. Além disso, gerou uma sequência de 10 números aleatórios (entre zero e um) como mostrada no Quadro 3.14.

Quadro 3.14 | Distribuição de probabilidade e números gerados para a simulação

Distribuição de Probabilidade		Simulação	
Prob (%)	Demanda		
10%	1000	1	0,477
20%	1100	2	0,704
40%	1200	3	0,028
20%	1300	4	0,852
10%	1400	5	0,488
		6	0,501
		7	0,368
		8	0,493
		9	0,174
		10	0,348

Fonte: elaborado pelo autor.

O lucro esperado médio, em reais, para uma ordem de compra de 1.300 unidades, considerando a receita de reciclagem, é de:

- a) R\$ 2.044,00
- b) R\$ 2.276,00
- c) R\$ 2.700,00
- d) R\$ 3.262,00
- e) R\$ 3.300,00

Teoria dos jogos e análise de decisão

Convite ao estudo

Nessa unidade final estudaremos a teoria dos jogos e seus conceitos e fundamentos. Na primeira seção prenderemos a construir modelos de jogos para serem solucionados por programação linear. Na Seção 2 veremos a análise de decisão como ferramenta no processo de decisão, entenderemos a diferença entre as tomadas de decisão sem e com experimentação e aprenderemos a aplicar o Teorema de Bayes e a montar a árvore de decisão de Bayes. Finalmente, na última seção, o tema será a teoria dos estoques, quando procuraremos entender a função dos estoques e como dimensioná-los corretamente segundo modelos determinísticos.

A teoria dos jogos considera um ambiente em que dois ou mais jogadores competem entre si com o objetivo de obter a maior recompensa possível. Como jogadores podemos entender, além de pessoas, empresas, países, órgãos de classes, entre outros, e existem vários modelos de jogos que envolvem o número de jogadores, o tipo de recompensa, o número de jogadas, o acesso às informações e os tipos de abordagem.

Jogos em sua grande parte são jogados em um cenário de incertezas, em que não se tem acesso a informações que permitam aos participantes uma análise pormenorizada antes de se tomar decisões. Para diminuir os riscos envolvidos nas tomadas de decisões, estudaremos os conceitos e as ferramentas da análise de decisão e entenderemos as diferenças de decisões com certeza, sob risco e sob incerteza. Aplicaremos conceitos estatísticos para modelar o teorema de Bayes e construir a árvore de decisão de Bayes.

Ao final da unidade, estudaremos a importância da correta gestão de estoque e como dimensioná-lo corretamente, considerando os aspectos quantitativos. Estoques servem de amortecedores na produção e seu correto dimensionamento permite que a produção flua sem interrupções.

Para facilitar os conceitos, imaginemos que a diretoria de uma empresa do setor metal mecânico está preocupada com a atuação da concorrência por causa do lançamento de um novo produto e procura analisar todos os cenários que envolvem suas decisões. Como se trata de um novo produto, existe o receio em relação à aceitação pelo seu mercado-alvo. O cenário é de incerteza e a empresa quer saber qual decisão tomar diante das alternativas disponíveis. Posto esse cenário, você deverá avaliar e indicar como a diretoria pode tomar as melhores decisões.

Ao final dessa unidade você estará apto a aplicar os fundamentos da teoria dos jogos e da análise de decisão e dimensionar corretamente estoques de maneira consciente através de raciocínio crítico.

Seção 4.1

Teoria dos jogos

Diálogo aberto

Em nosso dia a dia estamos constantemente em meio a conflitos e competições. Empresas competem por mercado com seus concorrentes e vivem em conflitos com seus fornecedores, clientes e sindicatos, de forma a assegurar os melhores resultados.

Muitos desses conflitos e competições podem ser estruturados em forma de um jogo, e os resultados dependem de uma série de estratégias a serem adotadas pelas partes competidoras. Em jogos, os jogadores desejam ganhar em um ambiente de incerteza, escasso de informações (ANDRADE, 2015).

Uma empresa do setor metal mecânico acaba de lançar um novo produto no mercado e a diretoria está preocupada com a atuação do principal concorrente diante o lançamento desse novo produto. Segundo pesquisa de mercado e análise de informações, identificou-se que a demanda está relacionada às estratégias de visitas realizadas pelos vendedores técnicos. As empresas não sabem com certeza quais estratégias serão adotadas por elas, mas querem saber os impactos. Por meio dos analistas, chegou-se à matriz de recompensas mostradas na Tabela 4.1, em relação a milhares de produtos vendidos ou perdidos para a concorrência.

Tabela 4.1 | Matriz de recompensas

		Estratégias do concorrente		
		1	2	3
Estratégias da empresa	1	1000	2000	4000
	2	1000	0	5000
	3	0	1000	-1000

Fonte: elaborada pelo autor.

A diretoria deseja saber o valor do jogo e se ele é estável. Você deverá solucionar esse desafio utilizando os conceitos da teoria dos jogos, de forma a oferecer à diretoria a possibilidade de tomar as melhores decisões.

Bons estudos!

Não pode faltar

A teoria dos jogos é uma teoria matemática que trata de como os competidores devem elaborar suas estratégias, uma vez que elas estão inter-relacionadas (COLIN, 2018; HILLIER, 2013).

Conceitos e fundamentos da análise de decisão

A teoria dos jogos considera que os jogadores tomarão suas decisões de maneira racional e que, portanto, escolherão as estratégias que lhes darão a maior rentabilidade ou o menor prejuízo. Os jogos podem ser classificados de diferentes formas, entre as quais podemos destacar:

- Segundo o número de jogadores (dois ou mais) – está relacionado ao número de interessados em participar do jogo, como as empresas de mesma área de atuação que desejam aumentar sua participação no mercado. Quando há somente uma companhia atuando no mercado, não há competição, e sim o monopólio dessa empresa, portanto, não é razoável falar em jogo.
- Pelo tipo de recompensa (soma zero ou soma não zero) – é o prêmio que o jogador recebe quando sua estratégia é vencedora em relação à dos outros jogadores. Nos jogos de soma zero, a soma do que o ganhador recebe e o que o perdedor paga é igual a zero. Em outras palavras, o lucro do ganhador será exatamente igual ao prejuízo do perdedor. Jogos de soma zero também são conhecidos como jogos de soma constante. Em um mercado onde exista uma demanda constante, sem oscilações, caso um jogador consiga conquistar parte do mercado de seu concorrente (caso haja somente dois jogadores), a parte conquistada será exatamente igual à parte perdida pelo outro jogador.
- Pelo tipo de estratégia a ser adotada (pura ou mista) – estratégias puras são aquelas em que o jogador adota sempre a mesma estratégia, independentemente das adotadas pelos outros jogadores. Entretanto, elas somente podem ser aplicadas até que se atinja um estágio de equilíbrio chamado ponto de sela. Quando esse ponto não existe, os jogadores adotarão estratégias mistas. Um exemplo é a negociação salarial entre sindicatos dos trabalhadores e patronal, quando cada um

apresenta uma proposta de acordo com seus interesses, e a diferença entre as propostas são os extremos, o que ocasiona um impasse. Caso haja um ponto de sela entre os valores oferecidos pelos sindicatos, eles utilizarão sempre a mesma estratégia de oferecer pequenos reajustes até que as ofertas satisfaçam ambos os lados, equilibrando as negociações. Se não houver um ponto de sela, um jogador poderá tentar ser mais agressivo em sua estratégia de negociação e, caso o outro jogador não consiga se defender desse ataque, levará desvantagem na negociação. Nesse cenário não há equilíbrio.

- Quanto ao acesso à informação (perfeito ou imperfeito) – quando o jogador sabe o que aconteceu no passado e o que pode acontecer no futuro, é dito que ele teve acesso à informação perfeito. Para ter acesso à informação perfeita, muitas vezes é preciso que ele pague um determinado valor, o que nem sempre é possível, seja por falta de recursos ou por impossibilidade de se conhecer o cenário futuro.
- Segundo a abordagem (cooperativa ou não cooperativa) – nos jogos cooperativos os jogadores podem construir uma estratégia que beneficie a todos os interessados, enquanto nos jogos não cooperativos, as estratégias são formuladas segundo o ponto de vista de um único jogador. Exemplo: empresas que se reúnem em consórcio para participarem de uma licitação concorrendo com outras empresas.
- Pela sequência das decisões (simultânea ou sequencial) – os jogadores podem escolher a estratégia simultaneamente, ou seja, ao mesmo tempo, ou em decisões sequenciais, quando cada jogador aguarda sua vez de jogar. Existem leilões em que as empresas jogadoras devem apresentar uma única proposta, simultaneamente, e a melhor proposta é a ganhadora. Em outros tipos de leilões, uma empresa jogadora apresenta uma proposta inicial e as outras vão aumentando o valor do lance sequencialmente, até que se atinja um valor que nenhuma empresa está disposta a aumentar.

Para analisar um jogo, é comum utilizar uma matriz de recompensas (ou de pagamentos, de retornos ou ainda de compensações), conforme a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 | Matriz de recompensas para dois jogadores, soma zero

		Estratégias do jogador A		
		A_1	A_2	A_3
Estratégias do jogador B	B_1	4	7	5
	B_2	3	-1	-7

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Pela matriz percebemos que se trata de um jogo com dois jogadores, A e B, e que o jogador A tem três estratégias diferentes (A_1 , A_2 e A_3), enquanto o B tem somente duas estratégias (B_1 e B_2). Logo, podemos observar que o número de estratégias a serem adotadas pelos jogadores não serão, necessariamente, iguais.

Caso o jogador B adote a estratégia B_1 e o jogador A escolha a A_1 , o primeiro ganhará 4, enquanto o segundo perderá 4, pois a soma será zero.

Vejamos o caso envolvendo dois jogadores com soma zero utilizando estratégias puras. Dois jogadores disputam o jogo par ou ímpar (COLIN, 2018; HILLIER, 2013). Um deles escolhe uma opção (par, por exemplo) e o outro fica com a outra (ímpar). A estratégia de cada um é escolher mostrar um ou dois dedos simultaneamente, e a soma de todos os dedos é o resultado, ganhando quem ficou com a escolha correta. Quem ganhar o jogo recebe R\$ 1,00, enquanto quem perde paga R\$ 1,00. Digamos que o jogador 1 escolheu ímpar, portanto, o jogador 2 ficou com a opção par. A matriz de resultados é apresentada na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 | Matriz de resultados do jogo par ou ímpar

		Estratégias do jogador 2	
		Um	Dois
Estratégias do jogador 1	Um	-1	1
	Dois	1	-1

Fonte: adaptada de Colin (2018) e Hillier (2013).

Percebemos que a soma dos pagamentos é zero e que o valor pago por um dos jogadores é exatamente igual ao que é recebido pelo outro jogador.



Exemplificando

Um jogo com dois competidores e duas estratégias diferentes é representado na Tabela 4.4 (MOREIRA, 2010).

Tabela 4.4 | Matriz de recompensas para dois jogadores, soma zero

		Estratégias do jogador M	
		M_1	M_2
Estratégias do jogador L	L_1	4	7
	L_2	3	-1

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Sob o ponto de vista do jogador L, a estratégia L_1 é melhor, pois a recompensa esperada para é de 7, enquanto L_2 levará a uma recompensa de 3. A estratégia L_1 é dita **dominante** em relação à L_2 .

O jogador M perceberá que o cenário do jogo é desfavorável para ele e, por ser um jogador racional, escolherá a estratégia M_1 , que levará a um menor prejuízo (4) em comparação à estratégia M_2 , que levará a um prejuízo de 7.

O jogo apresentou uma solução de equilíbrio (estável) com o resultado 4 para o jogador L e -4 para o jogador M. O valor 4 é chamado de **ponto de sela**.

Outra forma de solucionar o jogo envolvendo dois jogadores soma zero com estratégias puras é por meio dos critérios **Minimax** e **Maximin**.



Assimile

Crítério **Maximin** – parte de uma visão pessimista e pretende-se ter o máximo entre os mínimos. Entre as alternativas, escolhe-se inicialmente o pior resultado e, a seguir, escolhe-se o melhor entre eles ou o menos ruim (MOREIRA, 2010). No critério **Minimax** seleciona-se os maiores valores entre as alternativas para depois escolher o menor dos valores.



Exemplificando

Vejam os jogadores X e Y apresentando suas estratégias, conforme a Tabela 4.5.

Tabela 4.5 | Matriz de recompensas para dois jogadores, soma zero

		Estratégias do jogador Y		
		Y_1	Y_2	Y_3
Estratégias do jogador X	X_1	-3	2	4
	X_2	7	-2	-1
	X_3	8	10	7
	X_4	5	8	6

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

A partir da Tabela 4.5, escolhe-se os menores resultados das linhas e os maiores resultados das colunas. A seguir, constrói-se uma nova tabela, como mostrado na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 | Matriz de recompensas para dois jogadores, soma zero

		Estratégias do jogador Y			Mínimos nas linhas
		Y_1	Y_2	Y_3	
Estratégias do jogador X	X_1	-3	2	4	-3
	X_2	7	-2	-1	-2
	X_3	8	10	7	7
	X_4	5	8	6	5
Máximos na coluna		8	10	7	

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Inicialmente, vamos analisar o jogo sob ponto de vista do jogador X: entre todas as alternativas, a que vai oferecer o maior valor entre os menores resultados de cada alternativa é a estratégia X_3 (máximo entre os mínimos).

A análise do jogador Y diz respeito ao quanto ele deverá pagar por cada alternativa adotada e, entre os maiores valores a serem pagos, selecionar o menor (mínimo entre os máximos).

No exemplo, o valor encontrado pelo jogador X é 7 (máximo entre mínimos), e o resultado da estratégia escolhida pelo jogador Y também é 7 (mínimo entre os máximos), valor que representa o ponto de sela do jogo.

Modelagem e resolução pela programação linear

Até aqui estudamos os jogos com soma zero e estratégias puras e vimos que, nesse caso, os jogadores fazem uso de uma única estratégia e que existe uma solução estável representada pelo ponto de sela.

Entretanto, há outros casos envolvendo a teoria dos jogos em que não existe uma solução estável, não sendo possível determinar o ponto de sela. Essas situações são conhecidas como jogo de soma zero (ou constante) sem ponto de sela.

Como o jogo não apresenta ponto de sela, ele se torna instável e não é possível chegar a uma solução por meio de estratégia pura, pelo método de estratégias dominantes ou pelos critérios **Minimax** e **Maxmini**. Para esses jogos, um dos meios de solução é através da construção de um modelo de programação linear.

Vejamos um jogo entre dois jogadores cujas estratégias e recompensas são mostradas na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 | Matriz de recompensas de jogo soma zero

		Estratégias do jogador Y		
		Y_1	Y_2	Y_3
Estratégias do jogador X	X_1	-3	2	4
	X_2	7	-2	-1
	X_3	8	10	5
	X_4	5	8	6

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Podemos perceber pela Tabela 4.8 a ausência do ponto de sela, portanto, não há como encontrar uma solução estável para o jogo por estratégias puras.

Tabela 4.8 | Matriz de recompensas de jogo soma zero, sem ponto de sela

		Estratégias do jogador Y			Mínimos nas linhas
		Y ₁	Y ₂	Y ₃	
Estratégias do jogador X	X ₁	-3	2	4	-3
	X ₂	7	-2	-1	-2
	X ₃	8	10	5	5
	X ₄	5	8	6	5
Máximos na coluna		8	10	6	

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Vamos nos concentrar no jogador X: sabemos que seu objetivo é maximizar sua recompensa (que chamaremos de R) e que ele poderá usar quatro tipos de estratégias (X₁, X₂, X₃ e X₄), cada uma com uma probabilidade (p₁, p₂, p₃ e p₄) de ser usada.

Independentemente da estratégia escolhida pelo jogador Y, o X tentará maximizar sua recompensa, o que nos permite montar as seguintes inequações, considerando a estratégia de Y:

Para a Y₁ : $-3p_1+7p_2+8p_3+5p_4 \geq R$

Para a Y₂ : $2p_1-2p_2+10p_3+8p_4 \geq R$

Para a Y₃ : $4p_1-1p_2+5p_3+6p_4 \geq R$

Sendo que as probabilidades são maiores que zero:
 $p_1 \geq 0$; $p_2 \geq 0$; $p_3 \geq 0$; $p_4 \geq 0$

E a soma das probabilidades é igual a um: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

O objetivo é maximizar R

Então, o modelo ficará: *Max R*

$$-3p_1+7p_2+8p_3+5p_4 - R \geq 0$$

$$2p_1-2p_2+10p_3+8p_4 - R \geq 0$$

$$4p_1-1p_2+5p_3+6p_4 - R \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Sujeito a $p_1 \geq 0$; $p_2 \geq 0$; $p_3 \geq 0$; $p_4 \geq 0$

Extensões da teoria dos jogos

Vimos nessa seção os jogos envolvendo dois jogadores com soma zero (ou constante) utilizando as estratégias pura e mista, entretanto, a teoria dos jogos contempla outras variações ou extensões.

A primeira que merece destaque são os jogos em que estão envolvidos mais de dois jogadores, cenário que mais se aproxima das situações competitivas reais quando mais dois competidores estão envolvidos e disputam um mercado. Outra situação diz respeito aos jogos de soma não zero quando a soma das recompensas não é igual a zero (ou outra constante fixa). Os jogos infinitos são outra extensão em que os jogadores apresentam infinitas estratégias puras à disposição.



Pesquise mais

Outros casos da teoria dos jogos são o dilema do prisioneiro e o equilíbrio de Nash. No vídeo abaixo são abordados os dois casos.

KHAN ACADEMY EM PORTUGUÊS. Dilema dos prisioneiros e equilíbrio de Nash | Microeconomia | Khan Academy. 7 abr. 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=dO9bhdgPS-Y>>. Acesso em: 7 nov. 2018.

Aplicações da teoria dos jogos

A teoria de jogos pode ser aplicada na concorrência entre empresas comerciais, na diplomacia internacional e em outras situações que envolvem conflito entre dois ou mais competidores.

Jogos de soma não zero refletem diversas situações competitivas, como as estratégias de veiculação de propaganda de empresas concorrentes que podem afetar tanto a fatia de mercado que elas desejam conquistar quanto o tamanho total do mercado que está sendo disputado.

Jogos cooperativos em que discussões anteriores a eles podem levar a acordos entre competidores, como a participação em concorrências e licitações, originando consórcios que disputarão o lote que oferecerá a maior recompensa. Acordos coletivos entre sindicatos dos trabalhadores e patronal podem ser formulados como jogos cooperativos.



Refleta

Um dos maiores conflitos internacionais diz respeito à disputa comercial entre nações. Quando cada país tenta maximizar suas recompensas em detrimento de outros países, não existe a cooperação ou o ganho mútuo nas negociações.

Dentro dessa realidade, qual modelo se encaixaria melhor nos conflitos comerciais envolvendo as disputas entre os Estados Unidos e China atualmente? Há outros interessados que poderiam tirar proveito desse cenário?

Sem medo de errar

Uma empresa do setor metal mecânico acaba de lançar um novo produto no mercado, e a diretoria está preocupada com a atuação do principal concorrente diante disso. Por meio dos analistas chegou-se à matriz de recompensas mostradas na Tabela 4.1, em relação a milhares de produtos vendidos ou perdidos para a concorrência. A partir da matriz de recompensas, a empresa deseja saber o valor do jogo e se ele é estável.

Tabela 4.1 | Matriz de recompensas

		Estratégias do concorrente		
		1	2	3
Estratégias da empresa	1	1000	2000	4000
	2	1000	0	5000
	3	0	1000	-1000

Fonte: elaborada pelo autor.

Para solucionar o problema, será usado o método do Minimax e Maxmini e, para isso, construímos uma nova tabela com os valores mínimos nas linhas e os valores máximos das colunas, como mostrado na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 | Matriz de recompensas com mínimos nas linhas e máximos nas colunas

		Estratégias do concorrente			Mínimos nas linhas
		1	2	3	
Estratégias da empresa	1	1000	2000	4000	1000
	2	1000	0	5000	0
	3	0	1000	-1000	-1000
Máximos na coluna		1000	2000	5000	

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor do jogo é 1000 produtos, que representa também o ponto de sela, portanto, o jogo é estável, o que significa que, ao adotar a estratégia 1, a empresa terá como recompensa o pedido de 1000 unidades do produto. Concluimos que o jogo também é do tipo soma zero.

Avançando na prática

Investimento em propaganda

Descrição da situação-problema

A empresa deseja aumentar as vendas de seu novo produto e pensa em investir em propaganda. As opções de estratégias são: (1) investir em revistas especializadas; (2) criar um site de atendimento direto aos clientes; (3) anunciar em televisão. O departamento comercial da empresa montou a matriz de recompensas mostrada na Tabela 4.10 (COLIN, 2018).

Tabela 4.10 | Matriz de recompensas para cada tipo de propaganda

		Estratégias do concorrente		
		Revista	Site	TV
Estratégias da empresa	Revista	40	50	-70
	Site	10	25	-10
	TV	100	30	60

Fonte: adaptada de Colin (2018).

Os números indicam o ganho de clientes conquistados a partir do concorrente. A empresa deseja saber o ponto de sela, se ele existir e, caso não exista, pede para construir o modelo de programação linear que soluciona o jogo.

Resolução da situação-problema

Utilizando o método Minimax e Maxmini, conclui-se que não há ponto de sela. Esse método é demonstrado na Tabela 4.11, em que é possível observar que não há valores iguais nos mínimos nas linhas e na linha dos máximos na coluna, o que indica a falta de ponto de sela.

Tabela 4.11 | Método Minimax

		Estratégias do concorrente			Mínimos nas linhas
		Revista	Site	TV	
Estratégias da empresa	Revista	40	50	-70	-70
	Site	10	25	-10	-10
	TV	100	30	60	30
Máximos na coluna		100	50	60	

Fonte: adaptada de Colin (2018).

A solução do problema deverá ser feita através da construção de um modelo de programação linear:

MaxR

$40y_1 + 10y_2 + 100y_3 - R \geq 0$

$50y_1 + 25y_2 + 30y_3 - R \geq 0$

Sujeito a: $-70y_1 - 10y_2 + 60y_3 - R \geq 0$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

$\{y_1, y_2, y_3\} \geq 0$

Faça valer a pena

1. Dada a matriz de recompensas representada na Tabela 4.12, em que as recompensas são expressas para o jogador X (adaptado de MOREIRA, 2010).

Tabela 4.12 | Matriz de recompensas

		Estratégias do jogador Y		
		Y1	Y2	Y3
Estratégias do jogador X	X1	22	18	10
	X2	22	24	14
	X3	20	16	12

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

O ponto de sela é igual a:

- a) 10
- b) 12
- c) 14
- d) 16
- e) 18

2. Em um jogo de soma zero com dois jogadores, foi calculada a seguinte matriz de resultados, vista na Tabela 4.13 (ANDRADE, 2015):

Tabela 4.13 | Matriz de recompensas

		Jogador B			
Estratégias		1	2	3	4
Jogador A	1	1	2	2	4
	2	-2	3	3	-1
	3	1	-2	4	5
	4	0	1	2	1

Fonte: adaptada de Andrade (2015).

Examinando as estratégias na sequência Jogador A – Jogador B, qual é o valor do jogo?

- a) -1
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

3. Duas companhias atuam no mercado de bebidas. A Companhia 1 é líder no mercado e, por isso, a Companhia 2 vem desenvolvendo muitas estratégias para tentar absorver percentuais de mercado que estão sob domínio do concorrente. A tabela a seguir mostra os ganhos da Companhia 2 e as perdas da Companhia 1, em valores percentuais, segundo as mais recentes estratégias adotadas (NEUMANN, 2011).

Companhia 2	Companhia 1		
	A	B	C
1	11	9	5
2	9	7	4
3	4	3	7

Como critérios de decisão, suponha que a Companhia 2 empregue o critério Maximin e a Companhia 1 empregue o Minimax.

Qual é a probabilidade de emprego da estratégia 3 por parte da Companhia 2?

- a) 40%
- b) 45%
- c) 50%
- d) 55%
- e) 60%

Seção 4.2

Análise de decisão

Diálogo aberto

Os modelos matemáticos construídos nos problemas de programação linear usavam como base informações com relativo grau de certeza e seus resultados podem ser previstos quando a função objetivo e suas restrições de recursos são bem definidas no modelo construído. “Embora essas consequências normalmente não possam ser previstas com absoluta certeza, elas poderiam ao menos ser estimadas com precisão suficiente para justificar o emprego de tais modelos” (HILLIER; LIEBERMAN, 2013, p. 644). Essas situações são chamadas de “decisões com certeza”, em que existirá sempre uma solução ótima.

Imaginemos uma empresa do setor metal mecânico que lançará um novo produto no mercado e que está preocupada em determinar a quantidade de matéria-prima a ser estocada. O cenário é de incerteza e a empresa quer saber quanta matéria-prima deve comprar. O fornecedor não tem problemas em proporcionar a quantidade pedida pela empresa, entretanto, compras acima do necessário geram um passivo financeiro que deve ser evitado. Em um esforço conjunto do departamento de marketing e do sistema de gerenciamento de informações, através de pesquisa de mercado e tabulação de dados históricos, concluiu-se que a demanda pelo novo produto oscila entre 12 mil e 15 mil unidades por mês.

O custo total da matéria-prima é estimado em R\$ 70 e o produto será vendido a R\$ 180. A matéria-prima referente à unidade do produto que não for vendida gerará uma despesa de R\$ 35. As probabilidades de venda são de 10%, 30%, 40% e 20% para venda de 12 mil, 13 mil, 14 mil e 15 mil unidades, respectivamente.

Diante das informações levantadas, você deve auxiliar o diretor na determinação de quanto de matéria-prima deverá ser solicitada, através da análise de decisão.

Uma dica: elabore a matriz de decisão e calcule os valores esperados das alternativas.

Conceitos e fundamentos da análise de decisão

A análise de decisão é um método, uma forma estruturada, que utiliza técnicas quantitativas para ajudar a escolher a melhor opção (decisão racional) quando os resultados são incertos. De uma forma geral a tomada de decisão envolve: a escolha entre alternativas, estados da natureza e resultados (prêmio).

Entenderemos a estrutura da análise de decisão analisando cada elemento dessa estrutura.

Alternativas (ou estratégias alternativas): são as possíveis ações a serem seguidas em relação a um problema.

Estados da natureza: a escolha entre as alternativas será feita diante um cenário de incerteza, em que cada resultado será afetado por fatores aleatórios e incontrolláveis pelo decisor. Esses fatores aleatórios determinam que situação será encontrada no momento em que a alternativa de decisão for executada. Cada uma das possíveis situações é chamada estado da natureza.

Resultados: é a consequência de se escolher uma dada alternativa quando ocorrer um determinado estado da natureza (MOREIRA, 2010).

Diante dos três elementos da estrutura de uma tomada de decisão é possível montar uma matriz que facilita a visualização dos elementos. A essa estrutura é dado o nome de matriz de decisão, como ilustrado na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 | Matriz de decisão

		Estados da natureza				
		EN_1	EN_2	EN_3	...	EN_k
Alternativas	A_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	...	R_{1k}
	A_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	...	R_{2k}
	A_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	...	R_{3k}
	...	...	...	...	...	...
	A_p	R_{p1}	R_{p2}	R_{p3}	...	R_{pk}

Fonte: adaptada de Moreira (2010).



Uma consideração a ser levada em conta em um cenário de incertezas diz respeito à necessidade, ou não, de realizar testes iniciais, como o teste de aceitação do produto por uma amostra do público-alvo, com objetivo de reduzir o nível de incerteza sobre o resultado. Esses testes envolvem custos e são conhecidos como experimentação (HILLIER, 2013). Podemos, portanto, dividir a tomada de decisão em: tomadas de decisão sem experimentação e tomadas de decisão com experimentação.

Outra forma de classificar a tomada de decisão diz respeito aos estados de natureza. Podemos ter três situações: decisão tomada sob certeza; decisão tomada sob risco; e decisão tomada sob incerteza.

Os modelos sob certeza usam como base informações com relativo grau de certeza e seus resultados podem ser previstos quando a função objetivo e suas restrições de recursos são bem definidas no modelo construído.

Na decisão tomada sob risco não se conhece exatamente qual o estado de natureza acontecerá, mas é possível associar a cada natureza uma probabilidade de ocorrência.

Existem situações em que a atribuição de probabilidades a eventos que condicionam os resultados de um problema é uma tarefa difícil ou mesmo impraticável (ANDRADE, 2015), ou seja, conhecemos os estados de natureza, mas não temos nenhuma estimativa de probabilidade (MOREIRA, 2010), essas decisões são tomadas sob incerteza.

A decisão tomada sob certeza é estudada a partir dos métodos como programação linear, programação inteira, programação binária, etc.

Regra de Decisão e Teorema de Bayes

Decisão tomada sob risco

Define-se como risco “uma estimativa do grau de incerteza que se tem com respeito à realização de resultados futuros desejados” (ANDRADE, 2015).

Na decisão tomada sob risco não se conhece exatamente qual o estado de natureza acontecerá, mas é possível associar a cada natureza uma probabilidade de ocorrência. A probabilidade da

ocorrência pode ser atribuída de forma objetiva através de dados históricos, controles internos da empresa e todos os dados que podem ser transformados em informações, ou de forma subjetiva (pela experiência do decisor).

A solução do problema que envolve uma decisão tomada sob risco está baseada no conceito do valor esperado da alternativa (VEA), ou seja, diante de um cenário, analisa-se cada alternativa segundo a probabilidade de ocorrência de um estado da natureza e o resultado esperado, e escolhe-se a **melhor** alternativa. Esse método também é conhecido como Regra de Decisão de Bayes (MOREIRA, 2010).



Exemplificando

Imagine uma empresa que deve escolher entre fabricar um determinado componente ou terceirizar a fabricação dele (as alternativas são, portanto: fabricar ou terceirizar o componente). A fabricação do componente envolve investimento para aumentar a capacidade de produção, portanto, se a demanda for baixa, a capacidade ociosa causará um custo elevado de manutenção das instalações. Houve um levantamento entre os dados e conseguiu-se estimar a probabilidade para cada situação e os lucros gerados (em milhares de reais) segundo cada demanda, como ilustrado na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 | Matriz de decisão

		Estados da natureza		
		Demanda baixa probabilidade = 45%	Demanda média probabilidade = 35%	Demanda alta probabilidade = 20%
Alternativas	Terceirizar componente	R\$ 15 (mil)	R\$ 30 (mil)	R\$ 150 (mil)
	Fabricar componente	- R\$ 40 (mil)	R\$ 25 (mil)	R\$ 200 (mil)

Fonte: elaborada pelo autor.

Note que no caso de fabricar o componente em uma baixa demanda ocorrerá prejuízo de R\$ 40 mil.

O valor esperado da alternativa terceirizar componente é:

$$15 \times (0,45) + 30 \times (0,35) + 150 \times (0,20) = 47,25 \text{ (mil reais)}$$

E o valor esperado da alternativa fabricar o componente é:

$$-40 \times (0,45) + 25 \times (0,35) + 200 \times (0,20) = 30,75 \text{ (mil reais)}$$

A alternativa terceirizar o componente é o que representa o maior lucro, portanto, é a melhor alternativa e deve ser a escolhida.

Note que a opção terceirizar é a melhor opção, pois o resultado esperado é o lucro gerado pelas alternativas. Entretanto, caso o resultado fosse o de gerar o menor custo, a melhor opção seria aquela que apresentasse o menor custo.

Análise de sensibilidade para a Regra de Decisão de Bayes

Os resultados obtidos pela regra de Bayes variam de acordo com as alternativas e as probabilidades associadas ao estado da natureza. Como estudado nos problemas de programação linear, devemos fazer uma análise de sensibilidade caso haja variação nos valores utilizados no problema original.

Vejam os a seguinte situação: uma empresa deseja expandir suas operações e para tanto pretende exportar parte de sua produção. A direção trabalha com três possibilidades no exterior: Abrir um escritório; utilizar uma comercial distribuidora (comercial distribuidoras são empresas que atuam na importação e exportação comprando ou vendendo produtos para empresas que não têm infraestrutura para comércio exterior); ou contratar representantes autônomos locais. A empresa considera como alta demanda quantidades acima de um determinado volume e baixa demanda quantidades abaixo desse volume. Dependendo da demanda, os lucros obtidos são representados na matriz de decisão da Tabela 4.16.

Tabela 4.16 | Matriz de decisão (lucro em milhares de reais)

		Estados da natureza	
		Alta demanda $p = 35\%$	Baixa demanda $p = 65\%$
Alternativas	Distribuidor	200	70
	Abrir escritório	300	-45
	Representantes	180	25

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Como é um novo negócio, completamente inédito para a empresa, a diretoria está insegura com as probabilidades levantadas e deseja analisar o que acontecerá com os resultados conforme houver variação nas probabilidades.

Para resolver a situação exposta, é preciso calcular o valor esperado das alternativas utilizando as probabilidades iniciais.

$$\text{Alternativa } Distribuidor: 200 \times (0,35) + 70 \times (0,65) = 115,50$$

$$\text{Alternativa Abrir escritório: } 300 \times (0,35) + (-45) \times (0,65) = 75,75$$

$$\text{Alternativa Representantes: } 180 \times (0,35) + 25 \times (0,65) = 79,25$$



Refleta

Refleta sobre a seguinte situação: após o cálculo do valor esperado das alternativas temos duas alternativas com o mesmo valor calculado. Qual das duas alternativas devemos escolher para tomar a melhor decisão?

Considerando as probabilidades iniciais, a melhor opção é: *Distribuidor* no país que pretende atuar, pois o valor esperado da alternativa (VEA) é o maior em relação às demais.

Para a análise de sensibilidade, chamaremos de p a probabilidade de que a demanda seja alta, e de $(1-p)$ a probabilidade de se ter uma baixa demanda, e calcularemos novos VEA em função de p .

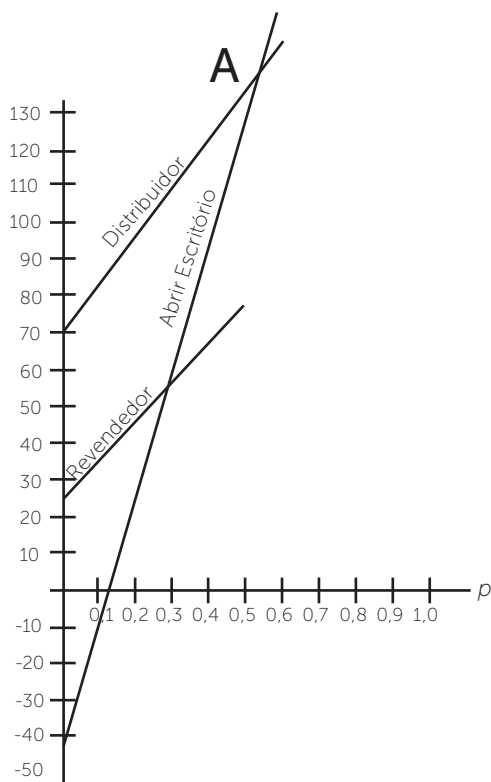
$$\text{Alternativa } Distribuidor: 200 \times (p) + 70 \times (1 - p) = 130p + 70$$

$$\text{Alternativa Abrir escritório: } 300 \times (p) + (-45) \times (1 - p) = 345p - 45$$

$$\text{Alternativa Representantes: } 180 \times (p) + 25 \times (1 - p) = 155p + 25$$

Podemos representar as alternativas por meio de retas, como mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 | Gráfico da análise de sensibilidade



Fonte: adaptada de Moreira (2010).

Observando o gráfico, podemos ver que até o ponto A, a melhor alternativa é usar o *Distribuidor*; após o ponto A, a melhor alternativa passa a ser *Abrir escritório*.

O valor de p pode ser calculado igualando-se as retas referentes às alternativas *Distribuidor* e *Abrir escritório*. Temos:

$$345p - 45 = 130p + 70$$

$$250p = 115$$

$$p = 0,535$$

Concluimos que para $0 < p < 0,535$ a melhor alternativa é utilizar *Distribuidor*; para $p = 0,535$ é indiferente o uso de *Distribuidor* ou *Abrir escritório*; para $0,536 < p \leq 1$ a melhor alternativa será *Abrir escritório*.

Tomada de decisão sem e com experimentação

As probabilidades de ocorrerem cada evento vistos até aqui foram consideradas como “aceitáveis”, sem muitas contestações, sem nenhum tipo de experimento que pudesse comprovar seus valores. Essas informações são levantadas sem muita precisão, o que pode elevar os riscos da decisão.

Há casos em que é possível fazer testes adicionais que podem melhorar as probabilidades iniciais (chamadas de probabilidades a priori) dos estados de natureza. As probabilidades melhoradas são conhecidas como probabilidades a posteriori ou probabilidades revisadas. Temos, portanto, uma tomada de decisão com experimento (MOREIRA, 2010).

Para uma melhor compreensão, utilizaremos o exemplo anterior.

Tabela 4.17 | Matriz de decisão (lucro em milhares de reais)

		Estados da natureza	
		Alta demanda p = 35%	Baixa demanda p = 65%
Alternativas	Distribuidor	200	70
	Abrir escritório	300	-45
	Representantes	180	25

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

As probabilidades mostradas na Tabela 4.17 são as propriedades a priori. Imaginemos que a empresa decidiu fazer uma pesquisa de mercado no país onde deseja atuar (experimento). Digamos ainda que a pesquisa mostrou um cenário favorável com um mercado em expansão. A partir desse resultado, é de se esperar que a probabilidade de se ter uma alta demanda é maior do que os 35% imaginados inicialmente. A pergunta a ser respondida é: qual a nova probabilidade de uma alta demanda?

A solução está baseada no cálculo da probabilidade condicionada, também conhecida como Lei de Bayes, ou Teorema de Bayes.

$$P(N / A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)}$$

Ou seja, deseja-se saber a probabilidade do evento N ocorrer quando o evento A já tiver ocorrido.

Para o nosso exemplo, chamaremos de AD o evento cujo resultado é uma alta demanda, e de BD o resultado de baixa demanda. Devemos também nomear os eventos referentes à pesquisa feita. Chamaremos o resultado da pesquisa de pesquisa favorável (PF) quando encontrado um cenário favorável, e de pesquisa pessimista (PD) quando encontrado um cenário desfavorável.

Podemos montar as seguintes situações: a probabilidade de uma alta demanda em um cenário favorável $P(AD/PF)$; a probabilidade de uma baixa demanda em um cenário favorável $P(BD/PF)$; a probabilidade de uma alta demanda em um cenário desfavorável $P(AD/PD)$; e por fim a probabilidade de uma baixa demanda em um cenário desfavorável $P(BD/PD)$.

Segundo a Lei de Bayes, o que desejamos saber é: $P(AD/PF) = \frac{P(AD \cap PF)}{P(PF)}$, ou seja, qual a probabilidade de se obter uma alta demanda em uma pesquisa favorável. Observe que não temos o valor de $P(AD \cap PF)$ e de $P(PF)$.

$P(PF)$ é a probabilidade de se ter uma pesquisa favorável, seja a demanda alta ou baixa, e pode ser expressa segundo a equação: $P(PF) = P(PF \cap AD) + P(PF \cap BD)$.

Temos de calcular $P(PF \cap AD)$ e $P(PF \cap BD)$, que também podem ser determinadas pela Lei de Bayes.

$$P(PF/AD) = \frac{P(PF \cap AD)}{P(AD)} \rightarrow P(PF \cap AD) = P(PF/AD) \times P(AD)$$

O valor de $P(AD)$ é a probabilidade a priori de se ter uma alta demanda, ou seja, 35%, e a $P(PF/AD)$ é a probabilidade de se ter uma alta demanda em uma pesquisa favorável e é possível admitir ser conhecido seu valor. Essa probabilidade é definida, por exemplo, pelo intervalo de confiança da pesquisa, ou mesmo pela experiência do pesquisador. Em nosso exemplo, admitiremos que $P(PF/AD)$ é igual a 80%. Portanto: $P(PF \cap AD) = 0,80 \times 0,35 = 0,28$.

Da mesma forma, e admitindo que $P(PD/BD)$ é igual a 10%, podemos determinar $P(PF \cap BD) = 0,1 \times 0,65 = 0,065$.

$$P(PF) = P(PF \cap AD) + P(PF \cap BD) = 0,28 + 0,065 = 0,345$$

Para acharmos $P(AD \cap PF)$, aplicaremos novamente a lei de Bayes:

$$P(PF/AD) = \frac{P(AD \cap PF)}{P(AD)}$$

$$P(AD \cap PF) = P(PF / AD) \times P(AD) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$$

Finalmente:

$$P(AD / PF) = \frac{P(AD \cap PF)}{P(PF)} \rightarrow P(AD / PF) = \frac{0,28}{0,345} = 0,812$$

Portanto, $P(BD / PF) = 1 - 0,812 = 0,188$.

Podemos perceber que valeu a pena o experimento, pois a probabilidade a posteriori é muito maior do que a probabilidade a priori.

Com as novas probabilidades, monta-se uma nova matriz de decisão, como visto na Tabela 4.18.

Tabela 4.18 | Matriz de decisão após o experimento (lucro em milhares de reais)

		Estados da natureza	
		Alta demanda p = 81,2%	Baixa demanda p = 18,8%
Alternativas	Distribuidor	200	70
	Abrir escritório	300	-45
	Representantes	180	25

Fonte: adaptada de Moreira (2010).

A partir da nova matriz, calcula-se os novos valores esperados da alternativa:

Alternativa *Distribuidor*: $200 \times (0,812) + 70 \times (0,188) = 175,56$

Alternativa *Abrir escritório*: $300 \times (0,812) + (-45) \times (0,188) = 235,14$

Alternativa *Representante*: $180 \times (0,812) + 25 \times (0,188) = 150,86$

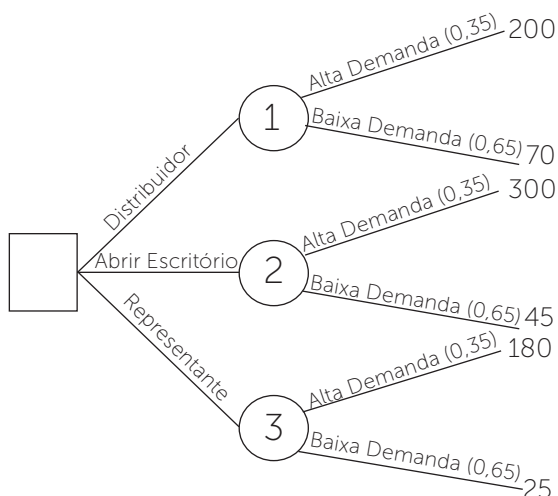
A melhor alternativa é *Abrir escritório*, o que já era esperado, pois, conforme a análise de sensibilidade com a probabilidade acima de 53,6%, é preferível a alternativa *Abrir escritório*.

Árvore de decisão

A árvore de decisão é uma representação gráfica dos problemas de decisão sob risco. Nela os cálculos envolvidos na escolha das alternativas podem ser feitos de maneira intuitiva.

A árvore de decisão para o exemplo pode ser vista na Figura 4.2.

Figura 4.2 | Árvore de decisão para o problema de decisão sob risco



Fonte: elaborada pelo autor.

As linhas são conhecidas como ramos. Os quadrados são chamados de nós de decisão e os círculos, de nós de estados de natureza, e à direita estão os resultados esperados. As árvores de decisão, normalmente, começam à esquerda (ou na parte superior) e se deslocam para a direita representando as alternativas e decisões ao longo do tempo (nas árvores com início na parte superior, as alternativas e decisões se posicionam abaixo).

Para solucionar a árvore de decisão basta calcular o valor esperado da alternativa (VEA) para cada estado da natureza.

$$\text{VEA (nó 1: alternativa Distribuidor)} = 200 \times (0,35) + 70 \times (0,65) = 115,5$$

$$\text{VEA (nó 2: alternativa Abrir escritório)} = 300 \times (0,35) + (-45) \times (0,65) = 75,75$$

$$\text{VEA (nó 3: alternativa Representante)} = 180 \times (0,35) + 25 \times (0,65) = 79,25$$

Logo, a melhor alternativa é através de *Distribuidor*, conforme vimos quando utilizamos a matriz de decisão.



Pesquise mais

No vídeo a seguir o autor apresenta técnicas de decisão em cenários de incerteza. Nessa situação não se tem conhecimento sobre que estado de natureza acontecerá, o que torna a decisão mais difícil.

ANÁLISE DA decisão em risco e incerteza - Parte 1. Produção: Leonardo Flach. [S.l.]: Leonardo Flach [canal do YouTube], 2012. (7min23s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Nr-HP2c00RE>>. Acesso em: 26 nov. 2018.

Sem medo de errar

Uma empresa do setor metal mecânico lançará um novo produto no mercado. Em um esforço conjunto do departamento de marketing e do sistema de gerenciamento de informações, concluiu-se que a demanda pelo novo produto oscila entre 12 mil e 15 mil unidades por mês.

O custo total da matéria-prima é estimado em R\$ 70 e o produto será vendido a R\$ 180. A matéria-prima referente a unidade do produto que não for vendida gerará uma despesa de R\$ 35. As probabilidades de venda são de 10%, 30%, 40% e 20% para venda de 12 mil, 13 mil, 14 mil e 15 mil unidades, respectivamente.

Inicialmente, montaremos uma matriz de decisão considerando o lucro que a empresa terá com a venda dos produtos (Tabela 4.19).

Tabela 4.19 | Matriz de decisão para compra de matéria-prima – lucro em reais

	Venda de 12 mil unidades	Venda de 13 mil unidades	Venda de 14 mil unidades	Venda de 15 mil unidades
Compra para 12 mil unidades	1.320.000,00	1.320.000,00	1.320.000,00	1.320.000,00
Compra para 13 mil unidades	1.285.000,00	1.430.000,00	1.430.000,00	1.430.000,00
Compra para 14 mil unidades	1.250.000,00	1.395.000,00	1.650.000,00	1.650.000,00
Compra para 15 mil unidades	1.215.000,00	1.360.000,00	1.505.000,00	1.650.000,00
Probabilidade prévia	0,1	0,3	0,4	0,2

Fonte: elaborada pelo autor.

A primeira linha da matriz de decisão considera comprar matéria-prima para a fabricação de 12 mil unidades do produto. Nesse caso, não haverá custo de armazenagem para a matéria-prima que exceder as vendas, portanto, $12.000 \cdot (180 - 70) = 1.320.000$.

Na segunda linha considera a compra de matéria-prima para a produção de 13 mil unidades do produto. Nesse caso, caso a venda seja de 12000 unidades, haverá um excesso de matéria-prima referente a 1.000 unidades não vendidas. Temos: $12.000 * (180 - 70) - 1.000 * (35) = 1.285.000$.

O mesmo raciocínio deve ser aplicado nas linhas referentes a 14.000 e 15.000 unidades.

Após a construção da matriz de decisão, calcula-se o VEA de cada alternativa. O resultado é mostrado na Tabela 4.20.

Tabela 4.20 | Valor esperado da alternativa para a matriz de decisão – lucro em reais

	Venda de 12 mil unidades	Venda de 13 mil unidades	Venda de 14 mil unidades	Venda de 15 mil unidades	VEA
Compra para 12 mil unidades	1.320.000,00	1.320.000,00	1.320.000,00	1.320.000,00	1.320.000,00
Compra para 13 mil unidades	1.285.000,00	1.430.000,00	1.430.000,00	1.430.000,00	1.415.500,00
Compra para 14 mil unidades	1.250.000,00	1.395.000,00	1.650.000,00	1.650.000,00	1.533.500,00
Compra para 15 mil unidades	1.215.000,00	1.360.000,00	1.505.000,00	1.650.000,00	1.461.500,00
Probabilidade prévia	0,1	0,3	0,4	0,2	

Fonte: elaborada pelo autor.

Conforme podemos ver, a partir da Análise de Decisão de Bayes, concluímos que a melhor alternativa é comprar matéria-prima para 14 mil unidades do novo produto.

Parabéns! Você ajudou a diretoria a solucionar mais um problema.

Avançando na prática

Utilização de instalações

Descrição da situação-problema

A empresa do setor metal mecânico deve decidir sobre como produzir o novo produto, se deve produzir na instalação já existente ou construir uma nova planta. A dúvida diz respeito à demanda do novo produto e aos estados de natureza de cada possibilidade da

demanda. Se a demanda for baixa (probabilidade de 20%), haverá um prejuízo, independentemente da instalação escolhida (atual ou a nova em estudo); já se a demanda for média haverá lucro na instalação atual e o retorno será zero em uma nova instalação; por fim, se a demanda for alta, ambas terão lucro. A matriz de decisão é mostrada na Tabela 4.21.

A diretoria da empresa deseja saber qual será a melhor decisão a ser tomada.

Tabela 4.21 | Matriz de decisão – resultados em milhares de reais

Alternativas	Baixa demanda	Média demanda	Alta demanda
Usar instalação atual	-150	150	350
Construir nova planta	-400	0	600
Probabilidade prévia	0,25	0,30	0,45

Fonte: elaborada pelo autor.

Resolução da situação-problema

Para solucionar o novo cenário é preciso solucionar a matriz de decisão e analisar o VEA pela Regra de Decisão de Bayes. O resultado é mostrado na Tabela 4.22:

Tabela 4.22 | Resultado com os valores de VEA em milhares de reais

Alternativas	Baixa demanda	Média demanda	Alta demanda	VEA
Usar instalação atual	-150	150	350	165
Construir nova planta	-400	0	600	170
Probabilidade prévia	0,25	0,3	0,45	

Fonte: elaborada pelo autor.

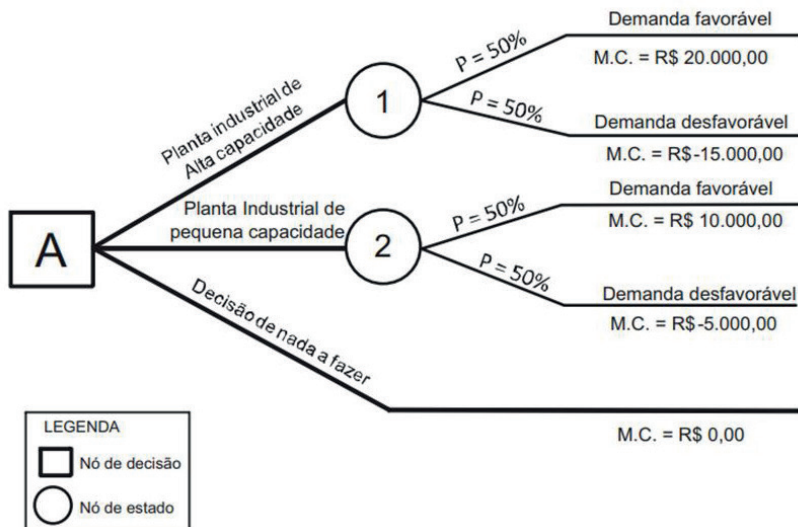
Os valores de VEA são calculados:

$$\begin{aligned}
 &(-150 \times 0,25) + (150 \times 0,3) + (350 \times 0,45) = 165 \\
 &(-400 \times 0,25) + (600 \times 0,45) = 170
 \end{aligned}$$

Logo, a melhor alternativa para a empresa é construir uma nova planta para a fabricação do novo produto.

Faça valer a pena

1. (Adaptada de Neumann, 2011) Considere a figura a seguir:



Fonte: Neumann (2011, p. 151).

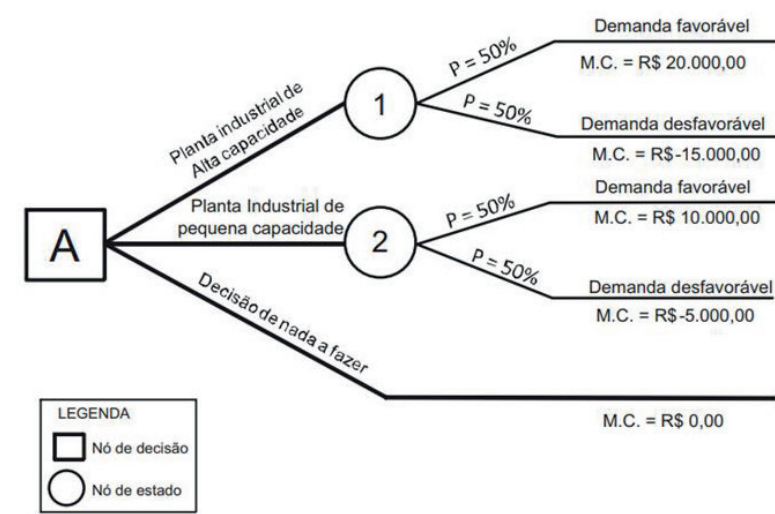
Com relação à figura e aos fundamentos da tomada de decisão, analise as afirmativas a seguir:

- É uma ação que pode ser escolhida pelo tomador de decisão, que, na figura, representa o mercado favorável ou desfavorável.
- Estado de natureza é uma ocorrência ou situação sobre a qual o tomador da decisão tem pouco controle.
- Do nó de decisão podem sair vários estados de natureza.

Assinale a alternativa correta.

- Apenas a afirmativa I está correta.
- Apenas a afirmativa II está correta.
- Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- Apenas as afirmativas II e III estão corretas.
- As afirmativas I, II e III estão corretas.

2. (Adaptada de Neumann, 2011) Considere a figura a seguir:



Fonte: Neumann (2011, p. 151).

Os valores monetários esperados (VME), em reais, para as alternativas 1 e 2, apresentadas na figura, são respectivamente:

- a) 20.000,00 e 10.000,00.
- b) 10.000,00 e 5.000,00.
- c) 5.000,00 e 5.000,00.
- d) 5.000,00 e 2.500,00.
- e) 2.500,00 e 2.500,00.

3. (Adaptada de Neumann, 2011) Uma companhia manufatureira de roupas precisou tomar as seguintes decisões em sua estratégia de mercado: comprar camisas de terceiros ou fabricá-las. Foi elaborada uma matriz de decisão, reproduzida a seguir, na qual o lucro é apresentado em milhares de reais. Observando-se a primeira linha da tabela, verificam-se os eventos relacionados à demanda da próxima coleção e as respectivas probabilidades de ocorrerem. Nas demais linhas, encontram-se os valores dos lucros relacionados à compra ou manufatura das camisas.

	Demanda baixa p=0,5	Demanda média p=0,3	Demanda alta p=0,2
Comprar	10	30	200
Manufaturar	-40	10	250

Fonte: adaptado de Neumann (2011).

Utilizando-se a Regra de Decisão de Bayes, qual possibilidade geraria maior lucro?

- a) Comprar as camisas, com lucro esperado de R\$ 54 mil.
- b) Comprar as camisas, com lucro esperado de R\$ 240 mil.
- c) Manufaturar as camisas, com lucro esperado de R\$ 33 mil.
- d) Manufaturar as camisas, com lucro esperado de R\$ 210 mil.
- e) Manufaturar as camisas, com lucro esperado de R\$ 93 mil.

Seção 4.3

Teoria dos estoques

Diálogo aberto

Estoque é um ponto muito sensível em qualquer empresa. Manter o seu nível muito alto proporciona maior qualidade de serviço ao cliente, pois o tempo de atendimento será muito baixo. Entretanto, investir em estoque significa imobilizar parte do capital da empresa, ou seja, o capital que poderia ser aplicado em outros projetos não estará disponível porque o dinheiro terá sido utilizado para manter o estoque.

Outras perguntas que se procura responder em se tratando de estoque são: quando comprar? Quanto comprar?

Nesta seção procuraremos responder a essas perguntas sob o ponto de vista da pesquisa operacional e considerando a aplicação das ferramentas de simulação. Para facilitar nosso estudo imaginaremos uma empresa do setor metal mecânico que está lançando um novo produto no mercado e deseja manter o estoque de forma que o custo total seja o menor possível.

O principal produto da empresa é um eixo dentado, fabricado a partir de tarugos metálicos adquiridos diretamente de um fornecedor de metais. O fornecedor, por estar próximo à empresa, garante a entrega total e imediata do material requisitado.

A demanda anual dos eixos está estimada em 250 mil unidades. O departamento administrativo estima que para cada pedido emitido (incluindo os custos referentes ao frete e inspeções de qualidade até o produto dar entrada no estoque) é de R\$ 2,5 mil. O custo de manutenção de cada tarugo metálico por ano é de R\$ 150.

Diante dessas informações a empresa deseja saber o custo anual de aquisição, de manutenção e total, considerando comprar 400, 700, 1.000 e 1,5 mil unidades. A empresa deseja saber quanto pedir de forma que o custo seja o menor possível.

Considerando que a gestão de estoque é um ponto sensível em qualquer organização, você deverá propor um modelo que possa

atender às necessidades da empresa diante do lançamento do novo produto e calcular o que foi solicitado pela diretoria da empresa.

Estude com atenção esta seção, na qual você aprenderá inicialmente os conceitos e fundamentos da teoria dos estoques, e posteriormente conhecerá os modelos de gestão de estoque sob o enfoque determinístico. Depois, resolva os problemas levantados pela diretoria.

Bons estudos e bom trabalho!

Não pode faltar

Conceitos e fundamentos da teoria dos estoques

Estoque é a definição para quantidades de bens físicos que estejam armazenados, de forma improdutiva (sem agregar valor), por um intervalo de tempo (MOREIRA, 2008). Portanto, segundo a definição, todo material que esteja aguardando ser processado (especialmente matérias-primas e insumos em empresas manufatureiras) ou ser entregue (produtos acabados) são considerados estoque.

A manutenção de estoque se justifica por uma série de razões (BALLOU, 1993):

Melhora do nível de serviço ofertado ao cliente: o estoque permite entregas mais rápidas, aumentando a satisfação do cliente e possibilitando uma facilidade ao departamento comercial na hora de realizar as vendas.

Incentivo de economias na produção: o estoque funciona como amortecedor entre a oferta e a demanda, permitindo uma produção mais constante, sem que sofra com as oscilações de vendas.

Permite economias de escala nas compras e no transporte: aquisições em volumes maiores possibilitam descontos no momento da negociação da compra, de forma similar, o preço de frete é significativamente menor quando o volume do material adquirido é próximo à capacidade volumétrica transportada pelo veículo (caminhão, vagão do trem, contêiner, etc.).

Age como proteção contra aumentos de preços: bens comprados estão sujeitos à flutuação do preço no mercado, por exemplo, material adquirido no mercado exterior, cujo preço é negociado em moeda estrangeira (normalmente, dólar americano).

Protege a empresa de incertezas em relação à demanda e ao tempo de suprimento: a previsão da demanda está sujeita a oscilações e o tempo de ressurgimento pode sofrer atrasos por diversas razões. Para se proteger dessas situações e garantir a disponibilidade de produtos as empresas mantêm um estoque adicional conhecido como estoque de segurança.

Serve como segurança contra contingências: estoques também garantem o fornecimento de produtos em casos de greves (e outros tipos de paralisações), acidentes, incêndios, inundações e outros incidentes não previstos.

Entretanto, para manter estoques as empresas precisam investir grandes somas que incluem, principalmente, o custo de aquisição dos materiais e o custo de manutenção desses materiais, o que implica imobilizar parte de seu capital na forma de estoques.

O desafio da gestão de estoque é manter níveis de materiais que atendam às necessidades dos clientes, minimizando o custo total de estoque, ou seja, aumentar a competitividade da empresa otimizando a política de estoque (controle de estoque científico) por meio da pesquisa operacional (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

O controle de estoque científico compreende as seguintes etapas:

- Construção do modelo matemático que representa o comportamento do sistema de estoque.
- Busca de uma política de estoque ótima para o modelo construído.
- Manutenção de um registro dos níveis de estoques atuais.
- Aplicação de uma política de estoques ótima para sinalizar quando e em que níveis reabastecer os estoques.



Assimile

O dimensionamento dos níveis de estoque depende da quantidade de produtos necessária para atender o mercado, ou seja, atender a demanda. Portanto, a gestão do estoque está diretamente relacionada a uma boa previsão da demanda.

Segundo Moreira (2008), existem duas formas de como o material é utilizado ao longo do tempo que são conhecidos como *demand independente* e *demand dependente*.

As demandas independentes surgem com as necessidades do mercado e são, basicamente, os produtos acabados ou semiacabados (peças) utilizadas como reposição (MARTINS; LAUGENI, 2005). As demandas dependentes podem ser programadas pela empresa, pois dizem respeito às matérias primas e itens que são componentes dos produtos finais, ou seja, seu dimensionamento depende da quantidade a ser produzida do produto. Como podemos perceber, as demandas dependentes dizem respeito às empresas manufatureiras.

A construção do modelo matemático depende essencialmente da previsibilidade do comportamento da demanda, podendo ser dividida em: modelos determinístico e estocástico (probabilístico). No modelo determinístico é possível prever, com razoável precisão, a demanda futura de um período. Por outro lado, quando a demanda não pode ser prevista com uma mínima precisão é utilizado o modelo estocástico (probabilístico) e a demanda é tratada como uma variável aleatória.

Concentraremos nossos estudos nos modelos determinísticos.

Componentes dos modelos de estoque

As políticas de estoque afetam diretamente a lucratividade da empresa, e sua escolha depende das lucratividades relativas de cada uma (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). As três classes dos custos que afetam a lucratividade, segundo Ballou (2007), são: a) custos de aquisição (ou de encomenda), b) custos de manutenção, e c) custos de falta de estoque (ou custos de escassez).

a) Custos de aquisição

Os custos relativos à reposição do estoque são os mais elevados na composição dos custos totais, sendo o fator limitante em relação à quantidade a ser requisitada. Aos custos de aquisição podem ser incluídos o preço de aquisição (nas empresas comerciais), ou custo de fabricação do produto (nas empresas manufatureiras); o custo referente à preparação do processo de produção (*setup*); o custo do processamento do pedido pelos departamentos de compra e contabilidade; o custo de transmissão do pedido ao ponto de suprimento; o custo do transporte

do pedido; e o custo de qualquer manuseio ou processamento dos produtos no ponto de recepção (BALLOU, 2007).

O custo de aquisição de uma quantidade “ q ” pode ser representado por uma função $c(q)$, descrita como: $c(q) = K + c \times q$ (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Onde:

K é a soma dos custos de preparação, de processamento, de transmissão, de transporte do pedido e o custo de manuseio descritos anteriormente.

c é o custo unitário do produto.

q é a quantidade de reposição.

b) Custos de manutenção

Envolvem os custos de armazenamento (o espaço físico necessário para manter o estoque), que são os custos com energia elétrica, água, manutenção das instalações, segurança patrimonial, manutenção das máquinas e equipamentos auxiliares de transporte (paleteiras e empilhadeiras). Os custos de manutenção também contemplam o custo de capital. Os materiais adquiridos somam uma importância em dinheiro que se aplicado no mercado financeiro ofereceria uma taxa de juros sobre o valor que foi imobilizado. Sobre o material em estoque, ainda incidem os custos referentes ao seguro, como garantia contra incêndio, roubo, inundação etc., e os impostos. Esses custos são chamados de custos dos serviços de estocagem. Por fim, os custos dos riscos de estocagem levam em consideração que, apesar de todas as providências terem sido tomadas, em algum momento haverá perdas por deterioração, contaminação, ruína e outras situações que tornariam o material estocado impróprio para uso ou venda.

c) Custos de falta de estoque

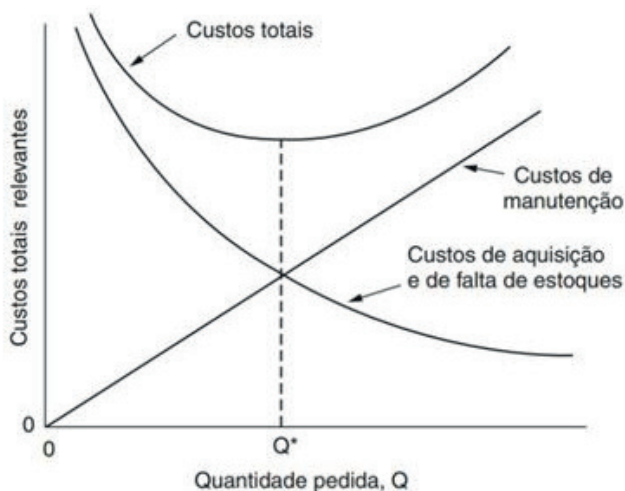
Quando um pedido não pode ser atendido por falta de material no estoque ocorrem dois tipos de custos: o de venda perdida e de pedidos atrasados. Como a reação do cliente diante da situação é intangível (não pode ser mensurada), o cálculo exato torna-se mais difícil. O custo de venda perdida é igual ao lucro que a empresa deixa de ter pelo cancelamento do pedido por falta de estoque.

Quando, apesar de não haver o material em estoque, o cliente concorda em aguardar pela entrega do pedido, pode-se criar custos adicionais relativos à produção e processamento das vendas, além de custos não programados de transporte e manuseio. Esses custos são chamados de custos de pedidos atrasados.

Outro custo que pode incorrer em ambas as situações diz respeito ao comportamento futuro do cliente perante a falta de estoque, ou seja, o risco de o cliente não voltar a comprar.

A Figura 4.3 representa o comportamento dos custos em relação ao tamanho do lote de reposição.

Figura 4.3 | Tamanho do lote de reposição



Fonte: Ballou (2007, p. 279).



Pesquise mais

Estoques podem envolver uma quantidade muito grande de itens a serem controlados, desde pequenos itens de baixo valor com grande volume de consumo (parafusos e porcas, por exemplo), até itens de alto custo, mas com baixa saída (como os motores elétricos).

Assista ao vídeo a seguir, que apresenta o passo a passo para a implantação da classificação ABC de estoques, tornando o controle mais racional e com menor custo.

CURVA ABC para Gestão de Estoques. Produção: Rafael H. P. Lima. [S.l.]: Aprendendo Gestão [canal do YouTube], 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=WMeYTyHHONw>>. Acesso em: 26 nov. 2018. (23min16s).

Modelo determinístico de revisão contínua – viés quantitativo

Mercados com pouca flutuação de demanda podem ser considerados constantes. Nesses casos, o controle dos estoques depende essencialmente da quantidade a ser resposta e dos intervalos de reposições dos materiais.

Para os casos em que os pedidos de reposição podem ser atendidos imediatamente e em sua totalidade, um modelo simples foi desenvolvido considerando aspectos econômicos: o Lote Econômico de Compras (LEC), também chamado de modelo EOQ.

A fórmula básica do LEC é desenvolvida a partir do cálculo do custo total, que considera os custos de aquisição e de manutenção do estoque.

$$LEC = \sqrt{\frac{2 \times C_p \times D}{C_m}}$$

Onde:

C_p é o custo de aquisição

D é a demanda anual do material, em unidades.

C_m é o custo unitário de manutenção.



Exemplificando

Conforme exemplo apresentado por Moreira (2008), para um item em estoque, a demanda anual é de 144 mil unidades. Estima-se que, para emitir um pedido, contando-se também os custos de transporte e inspeção até colocar a mercadoria no estoque, são gastos cerca de R\$ 1.000. Manter o item em estoque acarreta um custo de R\$ 200 por unidade e por ano.

Considerando essas informações, qual o tamanho do Lote Econômico de Compra?

A partir da fórmula:

$$LEC = \sqrt{\frac{2 \times C_p \times D}{C_m}}, \text{ temos:}$$

$$LEC = \sqrt{\frac{2 \times 1.000 \times 144.000}{200}} = 1.200 \text{ unidades}$$

O sistema em que se aplica o LEC é o modelo mais simples, pois considera a demanda constante e reposição imediata, em sua totalidade, seguindo o modelo de revisão contínua. Quando ocorre uma variação nas taxas de consumo e no tempo de espera, ocorrem novas variantes a serem consideradas.

Em qualquer cenário, são características do modelo de revisão contínua:

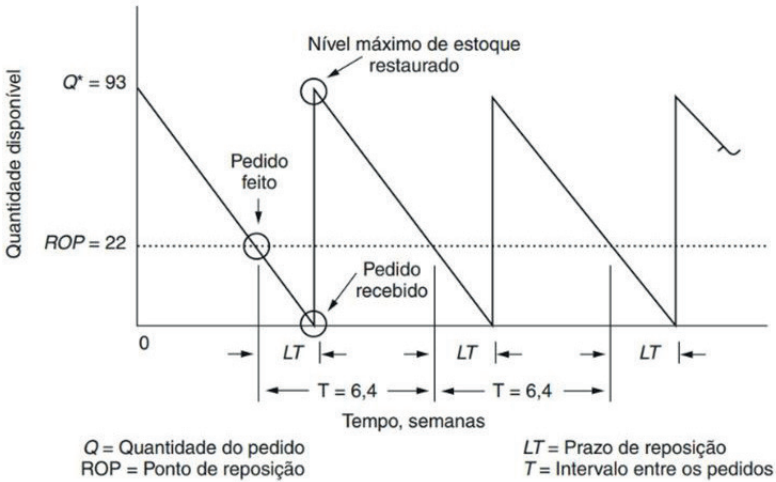
1. O estoque do item é controlado continuamente e quando o nível do estoque baixa até uma quantidade predeterminada (conhecido como ponto de reposição ou ressuprimento), é emitida uma nova ordem de compra.
2. A quantidade a ser comprada é sempre constante, normalmente calculada por meio do LEC.

O ponto de reposição deve ser dimensionado de forma que permita o consumo do material em estoque enquanto se espera a entrega do pedido (MOREIRA, 2008). O Esse ponto é calculado multiplicando-se a demanda (D) pelo prazo de entrega (LT):

$$ROP = D \times LT$$

A Figura 4.4 ilustra um exemplo do modelo de revisão contínua.

Figura 4.4 | Modelo de revisão contínua



Fonte: Ballou (2007, p. 285).

Estoque de segurança: tem como função proteger o sistema quando a demanda e o tempo de reposição variam ao longo do tempo. Seu dimensionamento considera a variação da demanda e a variação do tempo de reposição. As variações podem ser representadas pelos seus desvios padrão (MARTINS; LAUGENI, 2005).

Para a demanda que é representada pela distribuição normal e tem tempo de reposição fixo, o estoque de segurança é calculado pela fórmula:

$$E_s = Z \times \sigma_d \times \sqrt{LT}$$

Onde:

E_s = estoque de segurança.

Z = coeficiente da distribuição normal em função do nível de serviço desejado.

σ_d = desvio padrão da demanda.

LT = tempo de reposição.

Em cenário onde a demanda e o tempo de reposição são representados pela distribuição normal, o estoque de segurança é calculado pela fórmula:

$$E_s = Z \times \sqrt{\sigma_d^2 \times \overline{LT} + \overline{D}^2 \times \sigma_{LT}^2}$$

Onde:

E_s = estoque de segurança.

Z = coeficiente da distribuição normal em função do nível de serviço desejado.

σ_D^2 = variância da demanda no tempo LT .

σ_{LT}^2 = variância do tempo de reposição LT .

$\overline{LT}$ = tempo de reposição médio.

$\overline{D}^2$ = demanda média ao quadrado.

O ponto de ressuprimento final é expresso por: $ROP = D \times LT + E_s$.

Modelo determinístico de revisão periódica – viés quantitativo

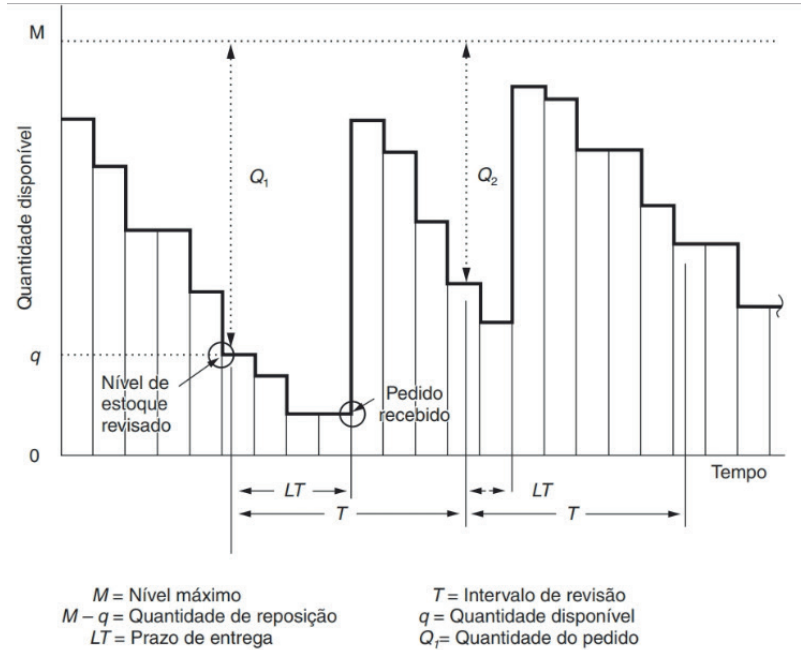
No modelo de revisão periódica, o controle da quantidade de materiais em estoque é feito em intervalos de tempos regulares. Além dos intervalos regulares de verificação, esse modelo tem como característica:

A quantidade a ser pedida corresponde à diferença entre o estoque máximo predeterminado e a quantidade em estoque. Em outras palavras, no modelo de revisão periódica calcula-se uma quantidade máxima de estoque de cada material, e em intervalos de tempo regulares é levantada a quantidade disponível em estoque e então é feito o pedido do material faltante para se atingir a quantidade máxima do material predefinido.

O nível máximo considera a quantidade necessária para cobrir o período até a próxima inspeção e o tempo de chegada do material solicitado.

Podemos perceber que nesse modelo a quantidade do pedido varia de acordo com a oscilação da demanda entre os períodos de inspeção. A Figura 4.5 representa um exemplo do modelo.

Figura 4.5 | Exemplo do modelo de revisão periódica

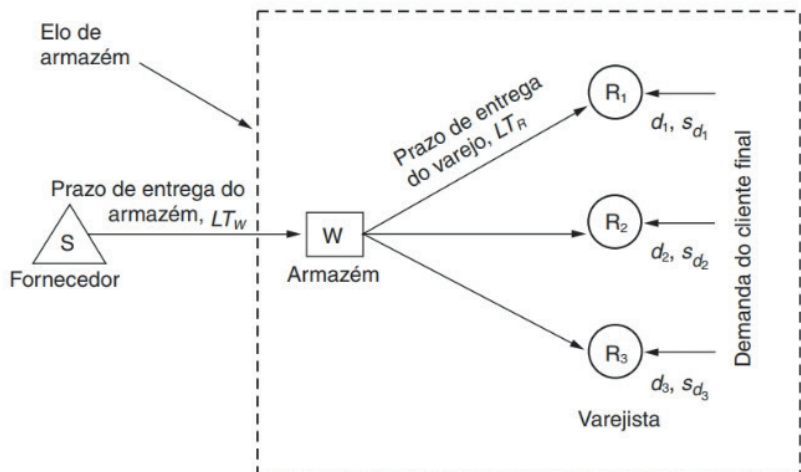


Fonte: Ballou (2007, p. 293).

Modelo de estoque multinível – viés quantitativo

Os modelos estudados até aqui consideraram o controle de itens isolados, concentrados em um único lugar. Entretanto, podemos considerar que o estoque de uma empresa pode estar distribuído em outros níveis. Por exemplo: em uma grande empresa varejista podemos imaginar um grande Centro de Distribuição (CD) que recebe os produtos dos mais diversos fornecedores. Esse CD é o primeiro nível do sistema de estoque, e a partir dele os produtos são distribuídos para os diversos pontos de vendas (lojas), que são considerados o segundo nível do sistema de estoque. Inclusive dentro da loja existem produtos armazenados dentro do armazém e outros nas gôndolas das lojas (terceiro nível do sistema de estoque). Um sistema desses, com vários níveis de estoque, é conhecido como modelo de estoque multinível (HILLIER; LIEBERMAN, 2013), ilustrado na Figura 4.6.

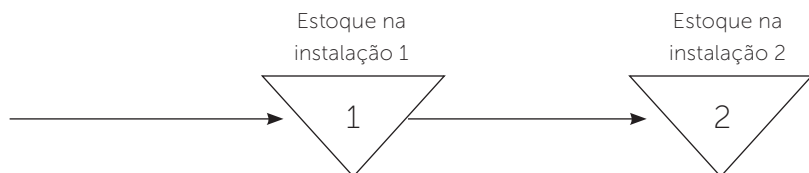
Figura 4.6 | Canal de distribuição com multiníveis de estoque



Fonte: Ballou (2007, p. 301).

Analisaremos agora um modelo para um sistema com dois níveis, representado pela Figura 4.7.

Figura 4.7 | Sistema de estoque de dois níveis

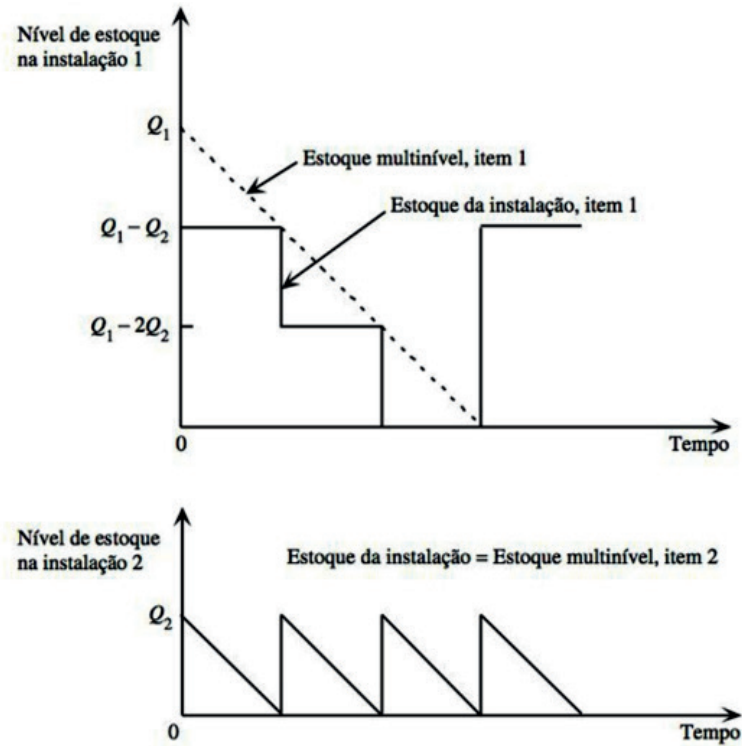


Fonte: Hillier e Lieberman (2013, p. 814).

Nesse modelo, as hipóteses do LEC são válidas para a instalação 2. O objetivo é minimizar a soma dos custos das duas instalações.

O comportamento do sistema com as duas instalações pode ser compreendido a partir da Figura 4.8.

Figura 4.8 | Níveis de estoques sincronizados nas duas instalações



Fonte: Hillier e Lieberman (2013, p. 816).



Refleta

O Modelo Toyota de Produção, também conhecido como toyotismo, baseia-se no combate de todos os tipos de desperdícios. Seu processo de produção é conhecido como *just in time*, que significa produzir a quantidade necessária no momento necessário. Reflita: Como esse modelo de produção afeta a política de estoque dentro da empresa? Qual a implicação desse modelo para os fornecedores da empresa?

Durante a discussão do conteúdo foi possível observar que a gestão dos estoques e a construção dos modelos dependem diretamente de fatores como a demanda, o tempo de reposição

do material e o cálculo do ponto de reposição, tornando o estoque sensível a esses fatores.

A aplicação de métodos de simulação permite maior confiabilidade nas tomadas de decisões, garantindo um alto nível de qualidade ao cliente. Por exemplo, através do método de Monte Carlo poderemos simular o comportamento da demanda diante de cenários diferentes e o tempo de entrega dos fornecedores. Também é possível simular o custo de falta de estoque, o que torna possível prever o quanto a empresa poderá deixar de lucrar nessa situação.

A partir da animação do software ARENA é possível simular e visualizar o comportamento dos estoques sob diferentes cenários.

Sem medo de errar

Uma empresa do setor metal mecânico, que está lançando um novo produto no mercado, deseja manter o estoque de forma que o custo total seja o menor possível. A matéria-prima do principal produto da empresa é um tarugo metálico adquirido diretamente de um fornecedor que garante a entrega total e imediata do material requisitado.

Diante de uma série de informações a empresa deseja saber o custo anual de aquisição, de manutenção e total, considerando comprar 400, 700, 1.000 e 1,5 mil unidades. A empresa deseja saber quanto pedir de forma que o custo seja o menor possível.

Todos os custos do pedido terão variação considerando a quantidade comprada. Teremos de calcular os custos de aquisição e de manutenção em função da quantidade que se cogita comprar (400; 700; 1.000 e 1,5 mil unidades).

Custo de aquisição em função da quantidade pedida:

$$C_p \times \left(\frac{D}{Q_c} \right) = 2500 \times \left(\frac{250000}{Q_c} \right)$$

Custo de manutenção em função da quantidade pedida:

$$C_m \times \frac{Q_c}{2} = 150 \times \frac{Q_c}{2}$$

O custo total é a soma do custo de aquisição e custo de manutenção.

A seguir apresentamos a Tabela 4.23, que considera as quantidades a serem adquiridas.

Tabela 4.23 | Custo total do custo de aquisição e custo de manutenção

Quantidade de compra	Custo de pedir (R\$)	Custo de manter (R\$)	Custo total anual (R\$)
Q_c	$C_p \times \left(\frac{D}{Q_c}\right)$	$C_m \times \frac{Q_c}{2}$	$C_p \times \left(\frac{D}{Q_c}\right) + C_m \times \frac{Q_c}{2}$
400	1.562.500,00	30.000,00	1.592.500,00
700	892.857,14	52.500,00	945.357,14
1.000	625.000,00	75.000,00	700.000,00
1.500	416.666,67	112.500,00	529.166,67

Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto, o menor custo total será de R\$ 539.166,67 caso a empresa adquira 1,5 mil tarugos metálicos.

A quantidade exata necessária para se garantir o menor custo é obtida a partir do cálculo do Lote Econômico de Compras, segundo

a fórmula: $LEC = \sqrt{\frac{2 \times C_p \times D}{C_m}}$.

Então, teremos:

$$LEC = \sqrt{\frac{2 \times 2500 \times 250000}{150}} = 2886,75$$

Logo, para que a empresa tenha o mínimo custo total, ela deverá comprar 2.887 unidades do tarugo metálico, bem acima das 1,5 mil unidades, conforme calculado anteriormente.

Avançando na prática

Cálculo do estoque de segurança e ponto de ressuprimento

Descrição da situação-problema

Um dos itens utilizados na fabricação do principal produto da empresa do setor metal mecânico apresentou a demanda e o

tempo de reposição nos últimos meses conforme registrado pelo setor responsável pela armazenagem de materiais.

Tabela 4.24 | Demanda mensal de um item

Mês	1	2	3	4	5	6
Demanda Unidade/Mês	115	125	80	95	100	120

Fonte: elaborada pelo autor.

O tempo de ressuprimento teve variação ao longo dos meses e apresentou o seguinte comportamento: 10 dias; 12 dias; 8 dias; 15 dias; 25 dias.

A empresa deseja saber qual o ponto de ressuprimento e qual o estoque de segurança para esse item considerando o nível de serviço de 90%.

Você deverá dimensionar o que está sendo pedido, com base no conteúdo estudado (MARTINS; LAUGENI, 2005).

Resolução da situação-problema

Inicialmente, devemos ter cuidado com as unidades de tempos. A unidade de tempo a ser considerada deve ser a da demanda, portanto, devemos converter a unidade relativa ao tempo de ressuprimento para mês conforme indicada a seguir:

$$\frac{10}{30} = 0,33 \text{ mês}; \quad \frac{12}{30} = 0,40 \text{ mês}; \quad \frac{8}{30} = 0,27 \text{ mês}; \quad \frac{15}{30} = 0,50 \text{ mês};$$

$$\frac{25}{30} = 0,83 \text{ mês}$$

A partir dos dados e utilizando os conhecimentos de estatística, calculamos o desvio padrão e a variância. Os resultados são:

$$\sigma_D^2 = 294,12$$

$$\sigma_{LT}^2 = 0,05$$

$$\overline{LT} = 0,47 \text{ mês}$$

$$\bar{D}^2 = 11.200$$

O coeficiente da distribuição normal é tabelado, como pode ser visto na Tabela 4.25:

Tabela 4.25 | Coeficiente da distribuição normal

Probabilidade (%)	90	91	92	93	94	95
Z	1,65	1,7	0,75	1,81	1,88	1,96

Fonte: adaptada de Martins e Laugení (2005).

Substituindo os valores na fórmula: $E_s = Z \times \sqrt{\sigma_d^2 \times LT + \bar{D}^2 \times \sigma_{LT}^2}$, temos:

$E_s = 1,28 \times \sqrt{294,12 \times 0,47 + 11.200 \times 0,05} = 33,82$ unidades

Para o cálculo do ponto de ressuprimento, temos:

$ROP = D \times LT + E_s$, onde a demanda a ser considerada é a média dos seis meses.

$ROP = 105,83 \times 0,47 + 33,82 = 83,57$ unidades, arredondando para 84 unidades.

Para o item em estudo, o ponto de ressuprimento é de 84 unidades, considerando um estoque de segurança de 33,82 unidades para atender o nível de serviço de 90%.

Faça valer a pena

1. (Adaptada de Neumann, 2011) Estoque é a definição para quantidades de bens físicos que estejam armazenados, de forma improdutiva (sem agregar valor), por um intervalo de tempo. A manutenção de estoque se justifica por uma série de razões, como aumentar o nível de serviço oferecido ao cliente, e age como proteção contra aumento de preços. Entretanto, o armazenamento desses bens físicos gera custos.

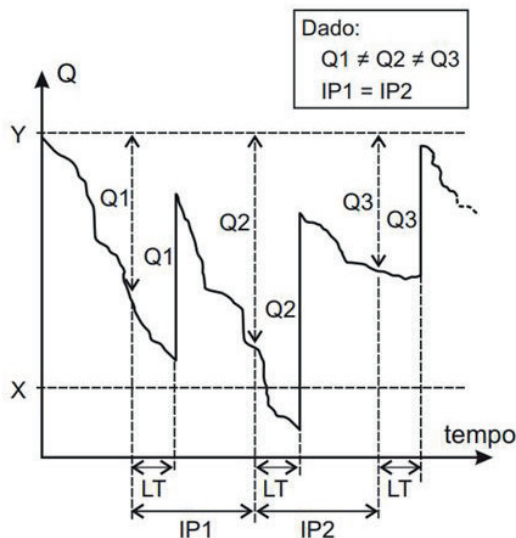
Entre as classes gerais de custos relevantes para a determinação da política de estoque, os custos de falta de estoque incluem os custos de:

- a) Processamento de pedidos e mão de obra do departamento de compras.
- b) Equipamentos de armazenagem e aluguel de espaço.
- c) Dinheiro imobilizado no estoque e serviços de estocagem.
- d) Vendas perdidas e pedidos atrasados.
- e) Energia e aquisição de mercadorias.

2. (Adaptada de Neumann, 2011) A figura a seguir ilustra o comportamento do consumo de um determinado item do estoque de uma empresa, que atua no setor têxtil, nos últimos meses. As demandas Q1, Q2 e Q3 não

foram constantes e os intervalos de tempo entre os pedidos foram iguais durante o período avaliado.

Figura | Comportamento do consumo de um determinado item do estoque de uma empresa que atua no setor têxtil



Fonte: adaptada de Neumann (2011).

A figura representa um sistema de reposição de estoques que é denominado reposição:

- Contínua, pois os intervalos de tempo entre as colocações dos pedidos são constantes.
- Contínua, pois o lote de compra tem como base o Lote Econômico de Compras.
- Contínua, pois o ponto de pedido determina a quantidade a ser requisitada.
- Periódica, pois os lotes e intervalos da compra são variáveis.
- Periódica, pois os intervalos de tempo entre pedidos de compra são fixos.

3. (Adaptada de Neumann, 2011) Uma empresa metalúrgica que fornece peças para a indústria automobilística pesquisou os custos de um determinado item segundo a quantidade a ser solicitada. A tabela apresentada a seguir é o resultado do levantamento dos custos do item em estoque.

Tabela | Custos de pedidos e de armazenamento segundo a quantidade solicitada

Quantidade do pedido	Custos anuais para colocação de pedidos de compra (R\$)	Custos anuais com armazenagem (R\$)
600	300,00	75,00
700	257,14	87,50
800	225,00	100,00
900	200,00	1.125,50
1.000	180,00	125,00
1.100	163,34	137,50
1.200	150,00	150,00
1.300	138,46	162,50
1.400	128,57	175,00

Fonte: adaptada de Neumann (2011).

Considerando os dados apresentados na tabela, qual é a quantidade do Lote Econômico de Compra (LEC)?

- a) 600.
- b) 800.
- c) 1.000.
- d) 1.200.
- e) 1.400.

Referências

ANDRADE, E. L. de. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para análise de decisões. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

BALLOU, R. H. **Logística empresarial**: transportes, administração de materiais e distribuição física. São Paulo: Atlas, 1993.

_____. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos**: logística empresarial. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

COLIN, E. C. **Pesquisa operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

MARTINS, P. G., LAUGENI, F. P. **Administração da produção**. 2. ed. rev., aum. e atual. São Paulo: Saraiva, 2005.

MOREIRA, D. A. **Administração da produção e operações**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

_____. **Pesquisa operacional**: curso introdutório. 2. ed. rev. e atual. São Paulo: Thomson Learning, 2010.

NEUMANN, C. **Engenharia de produção**: 340 questões de concursos da Cesgranrio comentadas. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

ISBN 978-85-522-1305-5



9 788552 213055 >